



# Transfert de rayonnement hors-ETL multidimensionnel. Application au spectre de l'hélium des protubérances solaires.

Ludovick Leger

## ► To cite this version:

Ludovick Leger. Transfert de rayonnement hors-ETL multidimensionnel. Application au spectre de l'hélium des protubérances solaires.. Planète et Univers [physics]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2008. Français. NNT : . tel-00332781

**HAL Id: tel-00332781**

**<https://theses.hal.science/tel-00332781>**

Submitted on 21 Oct 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par l'Université Toulouse III - Paul Sabatier

Discipline ou spécialité : Astrophysique

---

Présentée et soutenue par Ludovick LEGER

Le 16 juillet 2008

**Titre :**

*Transfert de rayonnement hors-ETL multidimensionnel.  
Application au spectre de l'hélium dans les protubérances solaires.*

---

**JURY**

Pr. Christophe PEYMIRAT : Président  
Dr. Véronique BOMMIER : Rapporteur  
Pr. Petr HEINZEL : Rapporteur  
Dr. Pierre GOUTTEBROZE : Examineur  
Dr. Frédéric PALETOU : Directeur de thèse

---

**Ecole doctorale :** Sciences de l'Univers, de l'Environnement et de l'Espace  
**Unité de recherche :** Laboratoire d'Astrophysique de Toulouse-Tarbes -- UMR 5572  
**Directeur(s) de Thèse :** Dr. Frédéric PALETOU  
**Rapporteurs :** -



# Table des matières

---

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Transfert de rayonnement hors-ETL</b>	<b>9</b>
1.1 Le transfert radiatif . . . . .	9
1.1.1 Quelques définitions . . . . .	9
1.1.2 Equation de transfert et solution formelle . . . . .	10
1.2 L'atome à plusieurs niveaux . . . . .	13
1.2.1 Raies sans chevauchement avec continu . . . . .	13
1.2.1.1 Cas général . . . . .	13
1.2.1.2 Cas particulier de l'atome à deux niveaux . . . . .	15
1.2.2 Chevauchement de raies et continus . . . . .	15
<b>2 Les méthodes du transfert numérique</b>	<b>19</b>
2.1 Principe de base des méthodes itératives . . . . .	19
2.1.1 Technique de l'opérateur approché . . . . .	20
2.1.2 Mise en œuvre de la méthode des caractéristiques courtes . . . . .	23
2.1.2.1 Schéma itératif ALI . . . . .	25
2.1.2.2 Schémas itératifs de Gauss-Seidel et SOR . . . . .	26
2.2 Le transfert 1D multi-niveaux . . . . .	28
2.2.1 Le schéma itératif MALI ( <i>Multilevel <math>\Lambda</math>-Iteration</i> ) . . . . .	29
2.2.2 Le schéma itératif GSM/SOR ( <i>Gauss-Seidel Multi-niveaux</i> ) . . . . .	30
<b>3 Méthode multi-grille</b>	<b>43</b>
3.1 Principe de base . . . . .	43
3.2 Le cas linéaire . . . . .	44
3.3 Le cas non-linéaire . . . . .	48
3.4 Mise en œuvre . . . . .	51
<b>4 Un nouveau code radiatif 2D</b>	<b>57</b>
4.1 La méthode des caractéristiques courtes en 2D . . . . .	57
4.2 Méthode de GSM/SOR en 2D . . . . .	59
4.3 Validation et résultats . . . . .	61
4.3.1 Validation par rapport à une solution analytique . . . . .	61
4.3.2 Résultats . . . . .	62



<b>5</b>	<b>Une très brève histoire de la physique solaire</b>	<b>77</b>
5.1	L'atmosphère solaire : une intense activité...	77
5.1.1	La photosphère	77
5.1.2	La chromosphère	79
5.1.3	La couronne	81
5.2	... d'origine magnétique	82
5.3	Les protubérances solaires	84
5.4	Modélisation	89
<b>6</b>	<b>Transfert radiatif multi-niveaux 2D dans les protubérances solaires</b>	<b>91</b>
6.1	Transfert radiatif pour l'atome d'hydrogène seul.	91
6.1.1	Le modèle atomique choisi et les hypothèses de travail	91
6.1.2	Validation des résultats	93
6.1.3	Cas d'une couche en mouvement	101
6.2	Transfert radiatif pour l'atome d'hélium seul.	102
6.2.1	Le modèle atomique choisi et les hypothèses de travail	103
6.2.1.1	Modélisation	103
6.2.1.2	Prise en compte de la structure fine	106
6.2.2	Résultats préliminaires	109
<b>7</b>	<b>Modélisation radiative 2D des raies spectrales de He I</b>	<b>119</b>
7.1	Les observations à THÉMIS	120
7.1.1	Le télescope THÉMIS <sup>a</sup>	120
7.1.2	Les profils observés	121
7.2	Modélisation des profils	121
7.2.1	Une couche individuelle	121
7.2.2	Modèle multi-couches	126
7.2.2.1	Etude d'une couche élémentaire	126
7.2.2.2	Etude du multi-couches	128
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>132</b>
<b>A</b>	<b>Données collisionnelles pour l'atome He I</b>	<b>137</b>
<b>B</b>	<b>Données sur les transitions radiatives pour l'atome He I</b>	<b>143</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>146</b>

---

<sup>a</sup><http://www.themis.iac.es/>

# Introduction

---

Le transfert radiatif constitue l'une des théories les plus utiles pour l'astrophysique. En effet, sauf lorsque des mesures *in situ* sont possibles, la connaissance des objets célestes réside principalement dans l'interprétation du rayonnement électromagnétique collecté. Ce rayonnement résulte généralement d'interactions entre la lumière et le plasma qui compose ces objets, via des processus d'émission, d'absorption et de diffusion.

Le transfert radiatif apparaît donc dans de nombreux domaines de recherches astrophysiques et les "objets" concernés vont des atmosphères stellaires et planétaires à, entre autres, les nuages de poussières interstellaires, les masers astrophysiques ou encore le fond diffus cosmologique.

L'interprétation des données obtenues avec les instruments d'observation dépend fortement des codes de calcul de transfert radiatif disponibles, pour deux raisons principales. Premièrement, des techniques de diagnostic convenables doivent être développées pour déduire, à partir des propriétés mesurables du champ de rayonnement, la composition chimique, le champ magnétique et l'état thermodynamique et dynamique des plasmas astrophysiques. Deuxièmement, les processus d'échange d'énergie et de moment cinétique par rayonnement jouent un rôle important dans la structure et le comportement dynamique de nombreux fluides astrophysiques.

La nécessité d'améliorer le diagnostic radiatif est très présente dans l'exploitation des données de nombreux instruments actuellement utilisés. On peut citer, entre autres, la spectropolarimétrie haute-résolution de la surface solaire avec le télescope solaire THÉMIS installé sur l'île de Ténérife (Espagne); l'étude des champs magnétiques stellaires et les environnements d'objets jeunes, avec les spectropolarimètres stellaires ESPaDOnS au CFHT à Hawaï, et NARVAL au TBL au Pic-du-Midi (Donati [39]); l'étude des étoiles en rotation très rapide, comme Achernar (Domiciano de Souza et al. [38]), avec l'interféromètre VLTI.

Les besoins en diagnostic radiatif ne vont cesser d'augmenter, à l'aune des nombreux projets à venir. Par exemple, la mission Herschel, permettant l'étude de la chimie moléculaire de l'univers et de la composition chimique des atmosphères (Pilbratt [113]), doit être lancée le 31 Octobre 2008; l'instrument RVS (Radial Velocity Spectrometer) qui sera embarqué sur la mission GAIA, qui a pour but d'observer la totalité du ciel pour obtenir une vue spectrométrique et cinématique des étoiles de la Voie Lactée (Katz et al. [70]); les nouvelles possibilités d'observation offertes par le futur interféromètre ALMA (Wooten [140] et références dans le même volume).

Idéalement, il faudrait coupler les équations du transfert radiatif et de la magnéto-hydro-dynamique pour fournir une explication physique convenable des phénomènes observés. Les codes de calcul de transfert radiatif doivent donc être à la fois réalistes, très rapides et précis pour faciliter la mise en place d'outils de modélisation hydro-radiative. En effet, les problèmes rencontrés mettent souvent en jeu des effets hors équilibre thermodynamique local (hors-ETL), multidimensionnels (2D voire 3D en coordonnées cartésiennes, sphériques ou cylindriques), avec des modèles atomiques complexes (typiquement une centaine de niveaux atomiques, éventuellement la structure fine atomique), en prenant éventuellement en compte les effets de redistribution partielle en fréquence (Heinzel et al. [63]).

La prise en considération des effets *hors-ETL* n'est pas encore totale, même en physique stellaire. En effet, le modèle standard, traité par des codes numériques bien connus tels ATLAS (Harvard) ou encore MARCS (Uppsala) est, de facto, à l'ETL. Même les développements récents, par exemple, menés par Asplund et al. [3] (et travaux suivants), concernant les abondances dans la photosphère solaire, n'ont fait jusqu'à présent que quelques pas dans le domaine de la formation hors-ETL des raies spectrales.

De même la prise en considération de la *géométrie* de la modélisation demeure ouverte. En effet, les excursions au-delà de la modélisation 1D, le plus souvent plan-parallèle, se heurtent à des complications liées d'un côté à l'emploi de méthodes suffisamment précises mais pas assez bien adaptées à des géométries complexes ou, d'un autre côté, de méthodes mieux adaptées à ces dernières, par exemple de type Monte-Carlo, mais assez généralement peu précises et limitées en terme d'étendue du domaine d'application (notamment en terme d'épaisseur optique).

Même si des méthodes mathématiques pour des applications dans le transfert radiatif multi-niveaux sont connues depuis les années 1970 (Mihalas [98]), le développement d'outils numériques réalistes, plus rapides et plus précis, est donc toujours d'actualité, et pour de nombreuses années encore.

Durant ces vingt dernières années, on a assisté à des progrès impressionnants en partie grâce à la mise en place de méthodes numériques s'appuyant sur l'utilisation d'algorithmes itératifs de type Jacobi (Olson et al. [101]) et adaptées à des problèmes de transfert radiatif de diverses natures.

L'étendue des applications de la méthode de Jacobi et de ses adaptations est importante. Mais, même s'ils ont été largement optimisés, les algorithmes basés sur cette méthode ne permettront aucun progrès futur significatif, sauf peut-être par l'utilisation de nombreux ordinateurs en parallèle, en raison notamment des temps de calcul de plus en plus impressionnants requis pour trouver les solutions précises à des problèmes de plus en plus complexes. En effet, les problèmes astrophysiques nécessitent un niveau de raffinement spatial très important pour obtenir des solutions précises (Chevallier et al. [33]), ce qui augmente encore les temps de calcul.

Afin de pallier ce genre de difficultés, de nouvelles méthodes sont apparues sous l'impulsion de Trujillo Bueno & Fabiani Bendicho [134], appliquant au cas du transfert radiatif les méthodes mathématiques de Gauss-Seidel (GS) et SOR (*Successive Over-Relaxation*). Puis, pour aller encore plus loin en terme de rapidité de calcul, Fabiani

Bendicho et al. [44] ont décrit en détail la mise en œuvre des techniques multi-grilles dans le cadre du transfert radiatif, combinées à un schéma itératif de type GS/SOR. Mais leur description explicite de la mise en œuvre de GS/SOR s'est limitée au cas de l'atome à deux niveaux d'énergie en géométrie 1D.

La première partie de mon travail de thèse a consisté à développer un nouveau code radiatif en géométrie 2D cartésienne pour des atomes à plusieurs niveaux d'énergie. Les premiers chapitres décrivent les diverses étapes pour y parvenir.

Dans le chapitre 1, je rappelle tout le formalisme entourant le transfert de rayonnement hors-ETL. Je définis les quantités physiques utilisées par la suite, l'équation de transfert radiatif à résoudre et la solution formelle qui y sera associée. Je termine ce chapitre par les équations de l'équilibre statistique qui permettent de calculer le peuplement d'un atome à plusieurs niveaux d'énergie en présence d'un champ de rayonnement hors-ETL.

Dans le chapitre 2, je décris les méthodes numériques itératives pour résoudre le problème du transfert radiatif, *en géométrie 1D plan parallèle*. Je rappelle le principe de base des méthodes itératives, les schémas itératifs ALI et GS/SOR pour l'atome à deux niveaux d'énergie, ainsi que la mise en œuvre de la méthode des caractéristiques courtes pour obtenir la solution formelle (Kunasz & Auer [72], Olson & Kunasz [102]). J'explique enfin comment ces méthodes doivent être mises en œuvre dans le cas d'un atome à plusieurs niveaux d'énergie (Paletou & Léger [109]).

Le chapitre 3 est consacré à la méthode multi-grille (Hackbusch [55], Briggs et al. [27]) qui, combinée à GS/SOR, est une technique de résolution très rapide et précise des problèmes de transfert radiatif. Je rappelle le principe de cette technique dans le cas de problèmes linéaires et non linéaires, puis la manière de l'appliquer au cas du transfert radiatif (Fabiani Bendicho et al. [44]).

Le chapitre 4 est consacré au transfert radiatif dans le cas d'une géométrie 2D cartésienne. Je décris la mise en œuvre de la méthode des caractéristiques courtes dans ce cas (Auer & Paletou [8]), puis j'explique comment appliquer le schéma itératif GS/SOR en 2D. La validation de cette méthode est aussi faite par rapport à une solution analytique, et je présente les performances obtenues en combinant la technique multi-grille avec GS/SOR en 2D (Léger et al. [79]).

La deuxième partie de mon travail a consisté à appliquer le nouveau code radiatif 2D que j'ai développé à l'étude des protubérances solaires.

Les protubérances sont des plasmas chromosphériques en suspension dans la couronne solaire qui est beaucoup plus chaude et ténue. L'étude de ces structures est d'intérêt général dans le cadre de la météorologie spatiale. En effet, il est établi, dans 40% des cas, un lien entre protubérances éruptives et éjections de masse coronale (Subramanian & Dere [129]). Ces dernières, d'immenses "bulles" de gaz expulsées de la couronne solaire, peuvent avoir des effets importants sur l'environnement Soleil-Terre (voir par exemple Webb et al. [139]), notamment lorsqu'elles interagissent avec la magnétosphère terrestre. Elle peuvent, par exemple, endommager les satellites, perturber les radio-transmissions ou provoquer des pannes électriques, la plus célèbre étant celle du 13 Mars 1989 pendant laquelle 6 millions de personnes ont été privées d'électricité pendant plusieurs heures au

Québec suite à une éjection de masse coronale survenue le 9 Mars. Elles peuvent être également dangereuses pour les sorties de l'homme dans l'espace, hors atmosphère et protection magnétique terrestre (navettes et station spatiales).

Malgré des observations systématiques depuis les années 40, et des décennies d'étude, les mécanismes de formation des protubérances ne sont pas encore parfaitement connus. En particulier, aucune théorie n'explique encore de manière satisfaisante leur impressionnante stabilité dans un environnement moins dense et plus chaud qu'elles. Compte-tenu de la faible valeur de  $\beta^b$  dans les protubérances, le champ magnétique joue certainement un rôle prépondérant dans la création et la stabilité des protubérances (voir les revues de Leroy [84], Landi Degl'Innocenti [77], Tandberg-Hanssen [130], Démoulin [37]), puis dans les mécanismes qui peuvent les rendre instables et les expulser hors de l'atmosphère solaire.

Les multiplets à 10830 Å et  $D_3$  de l'atome d'hélium He I sont parmi les meilleurs outils pour étudier le champ magnétique dans les protubérances. Des observations récentes de ces raies spectrales, dans tous les paramètres de Stokes, faites à l'aide du télescope THÉMIS<sup>c</sup> (Paletou et al. [112]), ont conduit à une révision complète des outils d'inversion du champ magnétique (López Ariste & Casini [90]). Mais ces outils ne considèrent pas les effets de transfert radiatif *éventuels* sur les multiplets à 10830 Å et  $D_3$ , alors que les mesures de rapport entre les pics bleu et rouge de ces multiplets (López Ariste & Casini [90]) indiquent clairement des domaines où ils ne sont vraisemblablement pas optiquement minces.

Les modèles radiatifs les plus récents (Labrosse & Gouttebroze [73] [74]) supposent des couches 1D plan parallèle statique et pas de structure fine pour le modèle atomique de l'hélium. Ceci conduit à des profils synthétiques gaussiens qui ne sont pas réalistes. Pourtant cette structure fine est évidente dans les observations spectropolarimétriques à haute résolution (Paletou et al. [112]).

Le chapitre 5 décrit brièvement les structures qui peuplent l'atmosphère solaire, ainsi que le rôle du champ magnétique dans toute l'activité du Soleil. Je me focalise ensuite sur les protubérances, je décris l'état des connaissances actuelles concernant leur morphologie et les paramètres physiques qui les caractérisent, tels que température, densités, ou encore champs magnétiques. Je poursuis par la manière dont je modélise une protubérance en 2D, afin d'y étudier le transfert radiatif à l'aide du code numérique décrit dans les chapitres précédents.

Je présente dans le chapitre 6 la stratégie numérique que j'ai adoptée pour résoudre de manière auto-cohérente les équations de l'équilibre statistique et l'équation de transfert radiatif, pour les atomes d'hydrogène et d'hélium, dans mon modèle de protubérance. Puis les résultats obtenus sont comparés avec ceux disponibles dans la littérature (Labrosse & Gouttebroze [73] [74]). Enfin je donne, à des fins de référence, les tables des populations atomiques, pour les atomes d'hydrogène et d'hélium, dans le modèle 2D de protubérance que je considère.

Enfin, le chapitre 7 est consacré à la *première* synthèse des multiplets à 10830 Å et  $D_3$

<sup>b</sup>On rappelle que  $\beta$  est le rapport entre la pression cinétique et la pression magnétique dans un plasma.

<sup>c</sup><http://www.themis.iac.es/>

---

à l'aide de mon code radiatif 2D et à la comparaison avec les observations effectuées au télescope THÉMIS, installé sur l'île de Ténérife (Archipel des Canaries, Espagne). Cette comparaison prend également en compte *la structure fine spatiale* des protubérances (Heinzel [59], Vial et al. [137], Heinzel & Anzer [61] et les articles suivants), afin de proposer un scénario de formation des multiplets permettant une meilleure interprétation des nouvelles observations.





# 1

## Transfert de rayonnement hors-ETL

---

La résolution d'un problème de transfert de rayonnement hors-ETL dans une atmosphère donnée, généralement un plasma, est basée sur la résolution auto-cohérente de l'équation de transfert radiatif pour  $N$  transitions (entre les différents niveaux d'énergie de l'atome considéré), soient  $N$  équations qui permettent de déterminer le champ de rayonnement existant dans cette atmosphère, et les équations de l'équilibre statistique, qui lient le champ de rayonnement aux états d'excitation et d'ionisation des atomes et/ou ions composant ce plasma. On va donc définir dans les pages qui suivent l'équation de transfert radiatif et les équations de l'équilibre statistique.

### 1.1 Le transfert radiatif

Pour toute cette section, le lecteur assoiffé de connaissances pourra se désaltérer auprès de sources de référence tels que Chandrasekhar [31], Mihalas [98], Rybicki & Lightman [123], Rutten [120].

#### 1.1.1 Quelques définitions

Considérons le flux énergétique : c'est une mesure de l'énergie transportée par tous les rayons lumineux qui traversent une surface donnée. Soit une surface  $dS$  normale à la ligne de visée et tous les rayons lumineux traversant  $dS$  dont la direction est contenue dans un angle solide  $d\Omega$ . On peut écrire l'énergie traversant  $dS$  pendant la durée  $dt$  et dans la bande de fréquence  $d\nu$  selon

$$dE = I_\nu dS dt d\Omega d\nu, \quad (1.1)$$

où l'on définit  $I_\nu$  comme *l'intensité spécifique*, exprimée en  $\text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{Hz}^{-1} \text{sr}^{-1}$ . Cette quantité est *indépendante* de la distance entre la source et l'observateur s'il n'y a ni absorbants ni autres sources d'énergie le long de la ligne de visée (Rybicki & Lightman [123], chapitre 1).



On définit *l'intensité moyenne* comme la moyenne angulaire de l'intensité spécifique selon

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Omega} I_\nu d\Omega. \quad (1.2)$$

On utilisera aussi sous le nom d'intensité moyenne, ou *intégrale de diffusion*, pour décrire l'interaction rayonnement-matière, la quantité

$$\bar{J} = \int_0^{+\infty} J_\nu \phi_\nu d\nu, \quad (1.3)$$

où  $\phi_\nu$  est un profil de raie.

### 1.1.2 Equation de transfert et solution formelle

Lorsque un rayon lumineux traverse de la matière, de l'énergie peut lui être ajoutée ou soustraite par interaction avec cette matière via des processus d'émission, d'absorption ou de diffusion. L'intensité spécifique ne sera donc, en règle générale, pas constante.

Dans le cas de l'émission, on définit *l'émissivité monochromatique*  $\eta_\nu$  comme l'énergie émise par unité de temps, par unité de volume, par unité d'angle solide et dans la bande de fréquence  $d\nu$

$$dE = \eta_\nu dV dt d\Omega d\nu, \quad (1.4)$$

où  $\eta_\nu$  s'exprime en  $\text{erg cm}^{-3} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1} \text{sr}^{-1}$ . Pour un élément géométrique de longueur  $ds$  le long du rayon lumineux, l'intensité ajoutée au faisceau par émission sera

$$dI_\nu = \eta_\nu ds. \quad (1.5)$$

Dans le cas de l'absorption (ou extinction), on définit le coefficient d'absorption  $\chi_\nu$  ( $\text{cm}^{-1}$ ) par l'équation suivante, représentant la perte d'énergie dans un faisceau parcourant la distance  $ds$  dans l'atmosphère,

$$dI_\nu = -\chi_\nu I_\nu ds. \quad (1.6)$$

Cette loi phénoménologique peut être comprise à l'aide d'un modèle microscopique dans lequel des particules de densité  $n$  ( $\text{cm}^{-3}$ ), présentant une section efficace  $\sigma_\nu$  ( $\text{cm}^2$ ), sont distribuées de manière aléatoire. Si l'on considère l'effet de ces absorbants sur le faisceau à travers  $dS$  dans l'angle solide  $d\Omega$ , l'énergie prélevée au faisceau est

$$-dI_\nu dS d\Omega dt d\nu = I_\nu (n\sigma_\nu dS ds) d\Omega dt d\nu, \quad (1.7)$$

d'où

$$dI_\nu = -n\sigma_\nu I_\nu ds, \quad (1.8)$$

qui est bien l'Eq. (1.6) avec

$$\chi_\nu = n\sigma_\nu, \quad (1.9)$$

que l'on écrit souvent sous la forme

$$\chi_\nu = \rho\kappa_\nu, \quad (1.10)$$

où  $\rho$  est la masse volumique et  $\kappa_\nu$  ( $\text{cm}^2 \text{g}^{-1}$ ) est appelé le coefficient d'absorption massique ou *densité massique de colonne*.

On peut maintenant inclure l'émission et l'absorption dans une seule équation traduisant la variation d'intensité spécifique le long d'un rayon lumineux. Des Eqs. (1.6) et (1.5), on peut déduire *l'équation de transfert radiatif* suivante :

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\chi_\nu I_\nu + \eta_\nu, \quad (1.11)$$

que l'on peut écrire, dans le cas général, sous la forme (Mihalas [98], p.30) :

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \frac{\partial I_\nu}{\partial s} = -\chi_\nu I_\nu + \eta_\nu. \quad (1.12)$$

Cette équation prend une forme simple si, au lieu de  $s$ , on utilise une autre variable  $\tau_\nu$ , la *profondeur optique* définie par

$$d\tau_\nu = \chi_\nu ds. \quad (1.13)$$

La profondeur optique  $d\tau$  est mesurée le long du trajet d'un rayon lumineux, et est donc de même signe que l'épaisseur géométrique  $ds$  (voir Fig. 1.1). Un milieu est dit *optiquement épais* ou *opaque* lorsque  $\tau_\nu > 1$ , et *optiquement mince* ou *transparent* lorsque  $\tau_\nu < 1$ .

On peut alors écrire l'Eq. (1.11), en divisant par  $\chi_\nu$ , sous la forme usuelle

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu, \quad (1.14)$$

où la *fonction source*  $S_\nu$  est définie comme le rapport entre le coefficient d'émission et le coefficient d'absorption :

$$S_\nu = \frac{\eta_\nu}{\chi_\nu}. \quad (1.15)$$

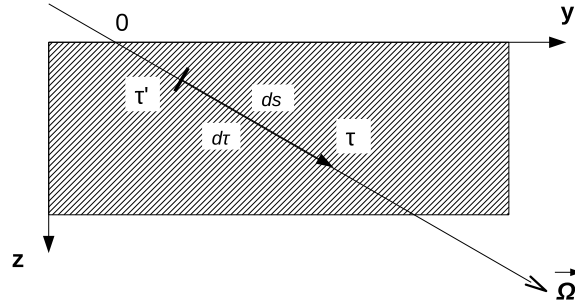


Fig. 1.1: Géométrie d'une couche en 2D cartésien : l'axe des  $y$  est confondu avec le sommet de la couche et l'axe des  $z$  est orienté de la surface vers le fond de la couche. Un rayon lumineux suit un trajet de direction  $\vec{\Omega}$ . La profondeur optique et l'épaisseur géométrique ont pour origine l'intersection  $O$  de cette direction avec l'axe des  $y$ , et sont comptées positivement le long de cette direction. La solution formelle de l'équation de transfert radiatif est obtenue par intégration entre les positions  $\tau'$  et  $\tau$ .

On manipule usuellement la fonction source  $S_\nu$  et la profondeur optique  $\tau_\nu$  plutôt que  $\chi_\nu$  et  $\eta_\nu$  : dans le cas de l'ETL, on peut montrer que la fonction source est égale à la fonction de Planck.

On peut désormais résoudre de manière formelle l'équation de transfert radiatif, en considérant toutes les quantités comme des fonctions de la profondeur optique  $\tau_\nu$  au lieu de l'épaisseur géométrique  $s$ . En multipliant l'Eq. (1.14) par un facteur intégrant en exponentielle  $e^{\tau_\nu}$  on obtient, après intégration entre deux positions  $\tau'$  et  $\tau$  (voir Fig. 1.1), la solution formelle :

$$I_\nu(\tau) = I_\nu(\tau')e^{-(\tau-\tau')} + \int_{\tau'}^{\tau} S_\nu(\tau_\nu)e^{-(\tau-\tau_\nu)}d\tau_\nu. \quad (1.16)$$

On peut remarquer que cette équation est simplement la somme de deux termes : l'intensité incidente sur la portion de trajet optique  $\tau' \rightarrow \tau$ , diminuée par l'absorption le long de ce trajet, plus la moyenne pondérée de la fonction source le long de la ligne de visée. Formellement, en astrophysique, on écrit l'intensité moyenne définie par l'Eq. (1.3) sous la forme :

$$\bar{J} = \Lambda[S] \quad (1.17)$$

Le problème qui se pose désormais pour résoudre cette équation est la nature du couplage entre rayonnement et matière. En effet, dans le cas hors-ETL, les coefficients  $\chi_\nu$  et  $\eta_\nu$  dépendent de  $\bar{J}$  via l'interaction rayonnement-matière. La nature de cette interaction, dans une atmosphère stellaire, va maintenant être détaillée en se plaçant au niveau atomique.

## 1.2 L'atome à plusieurs niveaux

### 1.2.1 Raies sans chevauchement avec continu

#### 1.2.1.1 Cas général

On considère ici un atome ou un ion caractérisé par un nombre de niveaux d'énergie  $N_{\text{niveaux}}$  et un nombre de transitions radiativement *permises*  $N_{\text{trans}}$  entre ces différents niveaux d'énergie. Sur la Fig. 1.2, on recense les processus qui peuvent exister entre deux niveaux d'énergie  $u$  et  $l$  d'un atome ou d'un ion : émission spontanée (caractérisée par le coefficient  $A_{ul}$ ), émission stimulée (caractérisée par le coefficient  $B_{ul}\bar{J}$ ), absorption (caractérisée par le coefficient  $B_{lu}\bar{J}$ ), excitation collisionnelle (caractérisée par le coefficient  $C_{lu}$ ) et désexcitation collisionnelle (caractérisée par le coefficient  $C_{ul}$ ). Les trois premiers processus ne sont à prendre en compte que dans le cas où la transition est radiativement permise entre les deux niveaux.

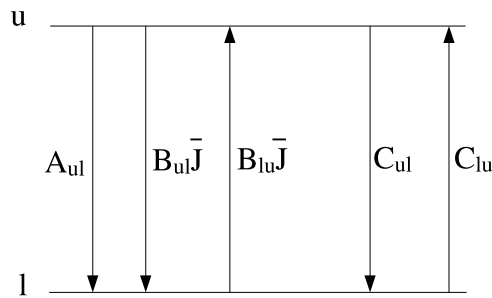


Fig. 1.2: Transitions radiatives et collisionnelles entre deux niveaux d'énergie  $u$  et  $l$  d'un atome ou d'un ion. L'énergie du niveau  $u$  est supérieure à celle du niveau  $l$ .

De manière générale, pour une transition radiative entre deux niveaux atomiques  $u$  et  $l$ , on peut écrire le coefficient d'émission  $\eta_{ul}$  à partir de la densité de population  $n_u$  (nombre de particules au niveau  $u$  par unité de volume) et du coefficient d'Einstein [42] pour l'émission spontanée  $A_{ul}$  :

$$\eta_{ul}(\nu) = \frac{h\nu_{ul}}{4\pi} n_u A_{ul} \psi_{ul}(\nu), \quad (1.18)$$

où  $\psi_{ul}$  est le profil d'émission de la raie.

De la même façon, on peut écrire le coefficient d'absorption  $\chi_{ul}$  à partir des densités de population  $n_u$  et  $n_l$  et des coefficients d'Einstein [42] pour l'absorption  $B_{lu}$  et l'émission stimulée  $B_{ul}$  :

$$\chi_{ul}(\nu) = \underbrace{\frac{h\nu_{ul}}{4\pi} n_l B_{lu} \phi_{ul}(\nu)}_{\text{absorption}} - \underbrace{\frac{h\nu_{ul}}{4\pi} n_u B_{ul} \psi_{ul}(\nu)}_{\text{émission stimulée}}, \quad (1.19)$$

où  $\phi_{ul}$  et  $\psi_{ul}$  sont les profils, respectivement, d'absorption et d'émission de la raie. Par la suite, l'émission stimulée sera prise en compte dans tous les calculs.

Par conséquent, la fonction source de raie pour une transition radiative entre deux niveaux atomiques  $u$  et  $l$  peut s'écrire, d'après sa définition donnée par l'Eq. (1.15), comme :

$$S_{ul}(\nu) = \frac{n_u A_{ul} \psi_{ul}(\nu)}{n_l B_{lu} \phi_{ul}(\nu) - n_u B_{ul} \psi_{ul}(\nu)}. \quad (1.20)$$

Par la suite, on se placera dans le cas d'une redistribution *complète* en fréquence (CRD) pour laquelle les profils d'absorption et d'émission sont identiques :  $\phi_{ul} \equiv \psi_{ul}$ ; cela correspond à une décorrélation complète entre la fréquence du photon avant diffusion et celle après diffusion. Dans ce cas, la fonction source de raie est alors *indépendante* de la fréquence.

L'émissivité et l'opacité totales sont écrites comme la somme des émissivités et des opacités de raie définies ci-dessus :

$$\begin{cases} \eta_\nu = \sum_{u>l} \eta_{ul}(\nu) + \eta_c(\nu) \\ \chi_\nu = \sum_{u>l} \chi_{ul}(\nu) + \chi_c(\nu) \end{cases} \quad (1.21)$$

où  $\eta_c$  et  $\chi_c$  sont les émissivité et opacité du *continu* qui seront supposées connues et fixes. La fonction source *totale* s'écrit donc :

$$S_\nu = \frac{\eta_\nu}{\chi_\nu} \quad (1.22)$$

Si on se limite, dans un premier temps, au cas de transitions radiatives et collisionnelles "lié-lié", les *équations de l'équilibre statistique* (EES) sont obtenues, pour chaque niveau lié, en considérant l'équilibre entre mécanismes de peuplement et mécanismes de dépeuplement, sous la forme d'un système de  $N_{\text{niveaux}} (\geq N_{\text{trans}})$  équations élémentaires :

$$\begin{aligned} & \sum_{j<i} [n_i A_{ij} - (n_j B_{ji} - n_i B_{ij}) \bar{J}_{ij}] \\ & - \sum_{j>i} [n_j A_{ji} - (n_i B_{ij} - n_j B_{ji}) \bar{J}_{ij}] \\ & + \sum_j (n_i C_{ij} - n_j C_{ji}) = 0, \end{aligned} \quad (1.23)$$

où  $i = 1, \dots, N_{\text{niveaux}}$  et  $\bar{J}$  est l'intensité moyenne définie par l'Eq. (1.3).

Les équations du système des EES n'étant pas indépendantes, il faudra remplacer une de ses lignes par une autre équation afin d'inverser les Eqs. (1.23) pour obtenir les densités de population  $n_i^a$ , connaissant les termes  $\bar{J}_{ij}$ .

---

<sup>a</sup>Notons que dans le cas présent, les EES sont *linéaires* en terme de densités de population  $n_i$

A cette fin, on peut utiliser les équations traduisant la conservation du nombre de particules et la conservation de la charge. Dans le cas présenté ici, où il n'y a ni ionisation ni recombinaison, on utilisera l'équation de conservation du nombre total de particules  $n_t$  suivante, combinée à l'électro-neutralité :

$$\sum_{i=1}^{N_{\text{niveaux}}} n_i = n_t. \quad (1.24)$$

### 1.2.1.2 Cas particulier de l'atome à deux niveaux

Dans le cas d'un atome à deux niveaux d'énergie, la fonction source de raie hors-ETL s'obtient en incluant les EES pour deux niveaux dans le rapport des populations qui apparaît dans l'Eq. (1.20) et s'écrit usuellement sous la forme :

$$S(\tau) = (1 - \varepsilon)\bar{J}(\tau) + \varepsilon B(\tau), \quad (1.25)$$

où  $\tau$  est la profondeur optique,  $B$  la fonction de Planck, qui dépend plus généralement du profil de température dans l'atmosphère et  $\varepsilon$  est la probabilité de destruction collisionnelle des photons (qui est une fonction de  $\tau$  dans une atmosphère réaliste), définie comme suit :

$$\varepsilon = \frac{(1 - e^{-\frac{h\nu_0}{kT}})C_{21}}{A_{21} + (1 - e^{-\frac{h\nu_0}{kT}})C_{21}} \quad (1.26)$$

### 1.2.2 Chevauchement de raies et continus

Dans le cas où la densité électronique n'est pas connue a priori, on doit traiter l'équilibre d'ionisation, en plus des EES. Pour ce faire, on doit prendre en compte les transitions "lié-libre" : le niveau d'énergie supérieure  $u$  d'une transition peut correspondre au premier niveau d'ionisation de l'atome ou de l'ion considéré. De plus, certaines raies proches peuvent se chevaucher, soit en étant issues d'atomes ou d'ions différents (ce sont les "blends"), soit en étant issues du même atome ou ion (dans le cas de la structure fine ou hyperfine atomique par exemple). Il peut y avoir également chevauchement lorsque certaines raies sont excitées par un continu, éventuellement issu d'un autre atome ; par exemple le continu de Lyman de l'hydrogène et les raies UV de l'hélium se chevauchent.

On notera pour le niveau atomique  $l$  sa densité de population  $n_l$ , son énergie  $E_l$  et son poids statistique  $g_l$ . Les équations de l'équilibre statistique s'écrivent dans le cas général :

$$\sum_{l'} n_{l'} (C_{l'l} + R_{l'l}) = \sum_{l'} n_l (C_{ll'} + R_{ll'}), \quad (1.27)$$

où les  $C_{ll'}$  sont les taux collisionnels et les  $R_{ll'}$  les taux radiatifs.

Afin de rendre plus synthétiques les expressions développées ultérieurement, on va s'attacher à unifier sous une même écriture les taux radiatifs  $R_{ll'}$  pour les raies et les continus. On adopte les notations de Rybicki & Hummer [122]. Dans le cas d'une transition de raie, on définira les coefficients :

$$\begin{aligned} U_{ll'}(\Omega, \nu) &= \begin{cases} \frac{h\nu}{4\pi} A_{ll'} \phi_{ll'}(\Omega, \nu) & l > l', \\ 0 & l < l', \end{cases} \\ V_{ll'}(\Omega, \nu) &= \frac{h\nu}{4\pi} B_{ll'} \phi_{ll'}(\Omega, \nu), \end{aligned} \quad (1.28)$$

en reprenant les coefficients d'Einstein  $A_{ll'}$ ,  $B_{ll'}$  et  $B_{l'l}$  définis dans la partie précédente, et en se plaçant toujours dans le cas de la CRD. La dépendance angulaire des profils de raie est écrite explicitement, pour prendre en compte la possibilité d'un champ de vitesse macroscopique.

Dans le cas d'une transition lié-libre, c'est-à-dire un "continu", on définit les coefficients :

$$\begin{aligned} U_{ll'}(\nu) &= \begin{cases} n_e \Phi_{ll'}(T) \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/kT} \sigma_{ll'}(\nu) & l > l', \\ 0 & l < l', \end{cases} \\ V_{ll'}(\nu) &= \begin{cases} n_e \Phi_{ll'}(T) e^{-h\nu/kT} \sigma_{ll'}(\nu) & l > l', \\ \sigma_{ll'}(\nu) & l < l', \end{cases} \end{aligned} \quad (1.29)$$

où  $n_e$  est la densité électronique,  $\sigma_{ll'}(\nu)$  est la section efficace de photoionisation lorsque  $l < l'$  ou de recombinaison lorsque  $l > l'$ , et  $\Phi_{ll'}(T)$  est la fonction de Saha-Boltzmann :

$$\Phi_{ll'}(\nu) = \frac{g_{l'}}{2g_l} \left( \frac{h^2}{2\pi m k T} \right)^{3/2} \exp[(E_l - E_{l'})/kT]. \quad (1.30)$$

On peut alors aisément écrire l'opacité  $\chi_{ll'}$  et l'émissivité  $\eta_{ll'}$  de la transition  $ll'$  à l'aide de ces quantités, par exemple pour  $l > l'$  :

$$\begin{cases} \chi_{ll'}(\Omega, \nu) &= n_{l'} V_{l'l} - n_l V_{ll'}, \\ \eta_{ll'}(\Omega, \nu) &= n_l U_{ll'} \end{cases} \quad (1.31)$$

L'opacité et l'émissivité totales s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \chi_{\Omega\nu} &= \sum_{l>l'} \chi_{ll'} + \chi_c = \sum_{l>l'} (n_{l'} V_{l'l} - n_l V_{ll'}) + \chi_c \\ \eta_{\Omega\nu} &= \sum_{ll'} \eta_{ll'} + \eta_c = \sum_{ll'} n_l U_{ll'} + \eta_c \end{cases} \quad (1.32)$$

Notons que l'on peut écrire l'émissivité totale sans restriction de sommation en raison des termes  $U_{ll'}$  qui sont nuls pour  $l < l'$ . Les quantités  $\chi_c$  et  $\eta_c$  sont l'opacité et l'émissivité du continu que l'on considérera ici comme des données du problème.

On peut alors écrire dans tous les cas (transitions de raies ou continus,  $l > l'$  et  $l < l'$ ) les coefficients de taux radiatif sous la forme :

$$R_{ll'} = \oint d\Omega \int d\nu [U_{ll'}(\Omega, \nu) + V_{ll'}(\Omega, \nu) I_{\Omega\nu}] . \quad (1.33)$$

Les équations de l'équilibre statistique peuvent désormais s'écrire, de façon générale, à partir de l'Eq. (1.27) :

$$\begin{aligned} \sum_{l'} n_{l'} C_{l'l} + \sum_{l'} \oint d\Omega \int d\nu [n_{l'} U_{l'l}(\Omega, \nu) + n_{l'} V_{l'l}(\Omega, \nu) I_{\Omega\nu}] \\ = \sum_{l'} n_l C_{ll'} + \sum_{l'} \oint d\Omega \int d\nu [n_l U_{ll'}(\Omega, \nu) + n_l V_{ll'}(\Omega, \nu) I_{\Omega\nu}] \end{aligned} \quad (1.34)$$

dans lesquelles on remarque que le champ radiatif apparaît simplement à travers l'intensité spécifique  $I_{\Omega\nu}$  à la fréquence  $\nu$  pour la direction angulaire  $\Omega$ , *prenant en compte automatiquement les chevauchements de raies* puisque les intégrations se font sur le domaine fréquentiel couvert par *l'ensemble* des transitions radiatives et des continus pour l'atome considéré.

Comme les équations de ce système ne sont pas indépendantes, il faut remplacer au moins une des équations par des contraintes, comme la conservation du nombre de particules et/ou la conservation de la charge.

Le problème du transfert de rayonnement pour l'atome à plusieurs niveaux hors-ETL consiste à déterminer les densités de population de  $N_{\text{niveaux}}$  niveaux liés et un continu, via la résolution de  $(N_{\text{niveaux}} + 1)$  EES, compte tenu d'un champ de rayonnement (termes  $I_{\Omega\nu}$  dans l'Eq. 1.34) qui dépend de ces mêmes populations, via la résolution de  $N_{\text{trans}}$  équations de transfert (une pour chaque transition permise) et ce à toutes les profondeurs de l'atmosphère.





# 2

## Les méthodes du transfert numérique

---

Les méthodes les plus utilisées, jusque dans les années 90 environ, pour résoudre de manière auto-cohérente les EES et l'équation du transfert radiatif (ETR) sont le fait de Auer & Mihalas [7], Auer & Heasley [6] : ces méthodes de *linéarisation complète* forment et résolvent des équations aux différences sur l'ensemble de l'atmosphère étudiée, en négligeant les termes de degré deux et supérieur dans les équations aux perturbations.

Sous l'impulsion de Scharmer & Carlsson [127] et Olson et al. [101], les possibilités offertes par les schémas itératifs de type Jacobi, combinées à la méthode des caractéristiques courtes (voir Auer & Paletou [8], Olson & Kunasz [102], Kunasz & Auer [72]), avec la possibilité de passer du 1D au 2D-3D, ont rendu les méthodes itératives plus "populaires". Leur principe est simple : partant de conditions initiales sur les populations des niveaux de l'atome considéré, on peut déterminer les fonctions sources par l'Eq. (1.20) puis le champ de rayonnement en intégrant pour chaque transition  $i \leftrightarrow j$  l'Eq. (1.17) et enfin déterminer une nouvelle estimation des populations via les EES c'est-à-dire les Eqs. (1.23) ou Eqs. (1.34). On recommence ensuite le processus jusqu'à ce qu'un "bon" critère de convergence soit atteint.

Pour expliquer le principe de ces méthodes itératives, je me placerai dans le cas de *l'atome à deux niveaux d'énergie* pour une atmosphère 1D plan parallèle. Puis je montrerai comment elles se généralisent au cas de l'atome à plusieurs niveaux.

### 2.1 Principe de base des méthodes itératives

Partant de l'Eq. (1.17), les méthodes présentées par la suite vont différer en fonction de la manière de calculer l'opérateur  $\Lambda$ .

La méthode la plus simple est la méthode mathématique de Picard, appelée  $\Lambda$ -itération (LI) en transfert numérique. Elle consiste à inverser l'opérateur complet  $\Lambda$  pour résoudre l'ETR. Mais elle présente peu d'intérêt en raison de sa pseudo-convergence (discussion dans Mihalas [98] §6).

On trouve ensuite la méthode mathématique de Jacobi qui donne les méthodes de type ALI (*Accelerated  $\Lambda$ -Itération*) avec opérateur diagonal en transfert numérique. Elles

utilisent un opérateur approché *local*  $\Lambda^*$  qui est la *diagonale exacte* de l'opérateur  $\Lambda$ , afin d'éviter l'inversion de matrice.

Enfin les méthodes de type GS (*Gauss-Seidel*) et SOR (*Successive Over-Relaxation*) utilisent un opérateur approché *non local*  $\Lambda^*$  qui est une matrice triangulaire supérieure ou inférieure. Tout l'intérêt de cette méthode réside dans le fait que l'on n'a pas besoin de calculer entièrement ni d'inverser cet opérateur approché pour résoudre l'ETR.

### 2.1.1 Technique de l'opérateur approché

Dans le cas de l'atome à deux niveaux d'énergie, lorsqu'on cherche à résoudre le problème de transfert de rayonnement de façon itérative, en combinant les Eqs. (1.17) et (1.25), le plus simple est d'utiliser, a priori, un schéma de la forme :

$$S = (1 - \varepsilon)\Lambda S^{(\text{old})} + \varepsilon B, \quad (2.1)$$

où la quantité  $S^{(\text{old})}$  a été calculée à l'itération précédente.

Ce schéma itératif est la méthode LI. Il présente peu d'intérêt car *il ne converge pas* (discussion dans Mihalas [98] §6, Frisch & Faurobert-Scholl [50]). On peut trouver une illustration sur la Fig. (2) de Paletou [107] où est tracée l'erreur maximale relative sur la fonction source en fonction du nombre d'itérations. En pratique le schéma LI est à proscrire pour toute modélisation radiative réaliste, c'est-à-dire dès que le milieu est optiquement épais.

Par contre, les méthodes ALI et GS utilisent une décomposition de cet opérateur  $\Lambda$  faisant apparaître un opérateur approché. L'utilisation d'un opérateur approché a été initialement proposée dans le domaine du transfert de rayonnement par Cannon [28] [29] (voir aussi Scharmer & Carlsson [127]).

On va alors considérer :

$$\begin{cases} \Lambda &= \Lambda^* + (\Lambda - \Lambda^*) \\ S &= S^{(\text{old})} + \delta S \end{cases} \quad (2.2)$$

et introduire ces perturbations dans l'Eq. (1.25). Ceci conduit alors à un schéma itératif de la forme :

$$S = [1 - (1 - \varepsilon)\Lambda^*]^{-1} (1 - \varepsilon)(\Lambda - \Lambda^*)S^{(\text{old})} + \varepsilon B. \quad (2.3)$$

La méthode optimale sera évidemment celle qui assure le meilleur compromis entre convergence et "coût numérique" par itération : il faut donc choisir un opérateur  $[1 - (1 - \varepsilon)\Lambda^*]$  à la fois facile à inverser et garantissant la bonne convergence de la méthode.

La méthode mathématique de *Jacobi* consiste à choisir pour opérateur approché  $\Lambda^*$  la *diagonale exacte* de l'opérateur complet  $\Lambda$ . Dans ce cas, l'inversion de  $[1 - (1 - \varepsilon)\Lambda^*]$  se résume à une division *scalaire* à chaque profondeur optique de la couche.

Ce schéma itératif de type Jacobi a été introduit dans le transfert radiatif numérique par Olson et al. [101] : c'est la méthode ALI avec opérateur diagonal. L'algorithme se présente comme suit, pour une itération :

### schéma itératif ALI

**Pour** chaque point  $k$  de la grille discrétisée spatialement

- calcul de l'intensité moyenne  $\bar{J}_k^{(\text{old})}$  via une solution formelle de l'ETR utilisant les valeurs de fonction source de l'itération précédente.

**Fin pour**

**Calcul** de la fonction source en chaque point  $k$  de la grille

$$\begin{aligned} S_k^{(\text{new})} &= \frac{(1 - \varepsilon)(\Lambda - \Lambda^*)S_k^{(\text{old})} + \varepsilon B_k}{1 - (1 - \varepsilon)\Lambda_{kk}} \\ &= \frac{(1 - (1 - \varepsilon)\Lambda)S_k^{(\text{old})} - S_k^{(\text{old})} - (1 - \varepsilon)\Lambda^*S_k^{(\text{old})}}{1 - (1 - \varepsilon)\Lambda_{kk}} \\ &= S_k^{(\text{old})} + \frac{(1 - \varepsilon)\bar{J}_k^{(\text{old})} + \varepsilon B_k - S_k^{(\text{old})}}{1 - (1 - \varepsilon)\Lambda_{kk}} \end{aligned}$$

soit

$$S_k^{(\text{new})} = S_k^{(\text{old})} + \Delta S_k, \quad (2.4)$$

en se basant sur des incréments :

$$\Delta S_k^{(\text{ALI})} = \frac{(1 - \varepsilon)\bar{J}_k^{(\text{old})} + \varepsilon B_k - S_k^{(\text{old})}}{1 - (1 - \varepsilon)\Lambda_{kk}}, \quad (2.5)$$

où l'exposant (old) désigne des quantités calculées à la précédente itération et où  $\Lambda_{kk}$  est un *scalaire* égal à l'élément diagonal de l'opérateur complet  $\Lambda$  à la profondeur de l'atmosphère correspondante.

Les méthodes de type ALI ont un grand succès car elles ont permis de traiter des problèmes incluant, entre autres, des atomes à plusieurs niveaux d'énergie, les géométries multi-dimensionnelles, la polarisation du rayonnement, les atmosphères dynamiques, la redistribution partielle en fréquence (voir les revues de Paletou [107], Hubeny [67]). Mais les besoins en vitesse et en précision sont importants pour une modélisation radiative *complexe*, en terme de structure atomique ou de géométrie par exemple. Il existe des méthodes qui répondent à ces besoins mais qui sont encore trop *confidentielles*, comme les méthodes de type Gauss-Seidel (GS).

Le schéma itératif GS a été introduit dans le transfert radiatif numérique par Trujillo Bueno & Fabiani Bendicho [134]. L'algorithme se présente comme suit, pour une itération :

### schéma itératif GS

**Pour** chaque point  $k$  de la grille

- calcul de l'intensité moyenne  $\bar{J}_k^{(\text{old and new})}$  via une solution formelle de l'ETR utilisant les "nouvelles" valeurs de la fonction source  $S_j^{(\text{new})}$  obtenues aux points précédemment parcourus  $j = 1, \dots, (k-1)$ , et les "anciennes" valeurs de la fonction source  $S_j^{(\text{old})}$  aux points pas encore parcourus  $j = (k+1), \dots, N$ .
- mise à jour *immédiate* de la fonction source  $S_k$  à l'aide d'incrément de fonction source de la forme :

$$\Delta S_k^{(\text{GS})} = \frac{(1 - \varepsilon)\bar{J}_k^{(\text{old and new})} + \varepsilon B_k - S_k^{(\text{old})}}{1 - (1 - \varepsilon)\Lambda_{kk}}. \quad (2.6)$$

où le terme énigmatique  $\bar{J}_k^{(\text{old and new})}$  (Trujillo Bueno & Fabiani Bendicho [135]) est calculé à partir de fonctions source déjà mises à jour, donc "new", et de fonctions source pas encore mises à jour, donc "old".

**Fin pour**

Il y a une différence *fondamentale* entre les méthodes ALI et GS. Pour la méthode ALI, on calcule le champ de rayonnement sur toute la grille et pour toutes les directions puis on met à jour la fonction source sur toute la grille. Alors que pour la méthode GS, dès qu'on a une valeur de la fonction source mise à jour en un point  $j$  de la grille, on l'utilise pour calculer l'intensité moyenne au point  $j+1$  qui va servir à calculer la fonction source en  $j+1$  etc...

Pour aller plus loin encore, la méthode SOR (Successive Over-Relaxation) permet d'accélérer la convergence de GS en surestimant la correction  $\Delta S_k$ . Les itérations de type SOR peuvent ainsi être mises en œuvre selon

$$\Delta S_k^{(\text{SOR})} = \omega \Delta S_k^{(\text{GS})}, \quad (2.7)$$

où  $\omega$  est un paramètre qui, dans le cas d'une *surrelaxation*, vérifie  $1 < \omega < 2$ .

Pour obtenir la valeur optimale de  $\omega$ , qui n'est pas connue a priori, on suit la méthode suggérée par Trujillo Bueno & Fabiani Bendicho [134]. On effectue quelques itérations de "pur Gauss-Seidel" (avec  $\omega = 1$ ) avant de calculer un paramètre  $\delta$  de la manière simple suivante :

$$\delta = \frac{R_c(\text{itr} + 1)}{R_c(\text{itr})}, \quad (2.8)$$

où  $R_c$  est le changement relatif maximum sur la fonction source, d'une itération à l'autre, pour toutes les profondeurs  $k$  :

$$R_c = \max_k \left( \frac{|S(\text{itr}, k) - S(\text{itr} - 1, k)|}{S(\text{itr} - 1, k)} \right). \quad (2.9)$$

On calcule ensuite la valeur optimale de  $\omega$ , selon la formule de Young [141]

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \delta}}, \quad (2.10)$$

avant de poursuivre les itérations.

Il existe plusieurs méthodes pour obtenir de manière efficace les éléments  $\Lambda_{kk}$  et résoudre la solution formelle de l'ETR. Par exemple, on peut utiliser la méthode de Feautrier [45] qui est décrite dans l'appendice de Rybicki & Hummer [121]. Elle consiste à résoudre un système d'équations tridiagonal linéaire par la méthode du pivot de Gauss, ce qui peut devenir rapidement coûteux en terme de mémoire et de temps de calcul, surtout lorsqu'on veut traiter des problèmes multidimensionnels. Je vais donc présenter une méthode plus rapide et extrêmement intéressante lorsqu'on veut passer de 1D à 2D : la méthode des caractéristiques courtes (SC).

### 2.1.2 Mise en œuvre de la méthode des caractéristiques courtes

La méthode des caractéristiques courtes (voir Auer & Paletou [8], Olson & Kunasz [102], Kunasz & Auer [72]) est particulièrement intéressante lorsqu'on traite un problème en 2D ou 3D. En effet, elle améliore considérablement la rapidité de la résolution du problème du transfert numérique, en terme de temps de calcul et de mémoire nécessaire, par rapport aux méthodes qui nécessitent des inversions de matrice. Son principe est de déterminer l'intensité spécifique en faisant des calculs de proche en proche. On verra plus loin tout l'intérêt de ce principe pour le schéma itératif de Gauss-Seidel qui met à jour la fonction source pas à pas, dès que l'intensité spécifique est connue en un point.

On va se limiter dans un premier temps à décrire la méthode des caractéristiques courtes pour une géométrie 1D, et on l'étendra plus loin au cas d'une géométrie 2D en coordonnées cartésiennes.

L'atmosphère 1D plan parallèle est discrétisée spatialement en une grille de  $N$  points. A l'exception des bords de la couche où le rayonnement est a priori connu, l'intensité spécifique en chaque point intérieur  $o$  de la grille est calculée de proche en proche dans la direction  $+\Omega$ , le long d'une *caractéristique courte* allant de  $u$  à  $o$  (voir Fig. 2.1), selon la formule

$$I_o = I_u e^{-\Delta\tau_u} + \int_0^{\Delta\tau_u} S(\tau) e^{-\tau} d\tau, \quad (2.11)$$

d'après l'Eq. (1.17),  $I_o$  étant l'intensité spécifique au point courant et  $I_u$  celle déjà connue au point précédent.

Si l'on suppose que  $S$  est *quadratique* avec la profondeur optique, on peut utiliser une interpolation polynômiale de Lagrange à partir de trois points consécutifs de la grille  $u$ ,  $o$  et  $d$ . On pose

$$S(\tau) = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2, \quad (2.12)$$

et on détermine les coefficients  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  en résolvant le système :

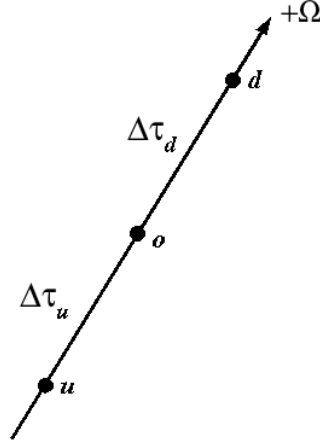


Fig. 2.1: Calcul de l'intensité spécifique en  $o$  dans la direction  $+\Omega$  (montante), le long de la caractéristique courte allant de  $u$  à  $o$ . Les trois points consécutifs  $u$ ,  $o$  et  $d$  sont utilisés pour déterminer la fonction source de manière quadratique.

$$\begin{cases} S(0) = S_o = a_0 \\ S(\Delta\tau_d) = S_d = a_0 + a_1\Delta\tau_d + a_2\Delta\tau_d^2 \\ S(-\Delta\tau_u) = S_u = a_0 - a_1\Delta\tau_u + a_2\Delta\tau_u^2 \end{cases} \quad (2.13)$$

On obtient ainsi par intégration :

$$\int_0^{\Delta\tau_u} S(\tau)e^{-\tau}d\tau = \Psi_u S_u + \Psi_o S_o + \Psi_d S_d, \quad (2.14)$$

où les coefficients  $\Psi$  sont donnés par :

$$\begin{cases} \Psi_u = \frac{w_2 + w_1\Delta\tau_d}{\Delta\tau_u(\Delta\tau_u + \Delta\tau_d)} \\ \Psi_o = w_0 + \frac{w_1(\Delta\tau_u - \Delta\tau_d) - w_2}{\Delta\tau_u\Delta\tau_d} \\ \Psi_d = \frac{w_2 - w_1\Delta\tau_u}{\Delta\tau_d(\Delta\tau_u + \Delta\tau_d)} \end{cases}, \quad (2.15)$$

et où

$$\begin{cases} w_0 = 1 - e^{-\Delta\tau_u} \\ w_1 = w_0 - \Delta\tau_u e^{-\Delta\tau_u} \\ w_2 = 2w_1 - \Delta\tau_u^2 e^{-\Delta\tau_u} \end{cases} \quad (2.16)$$

Finalement on obtient une formule simple permettant de calculer l'intensité spécifique en tout point de la grille, de proche en proche :

$$I_o = I_u e^{-\Delta\tau_u} + \Psi_u S_u + \Psi_o S_o + \Psi_d S_d. \quad (2.17)$$

On va maintenant expliciter la stratégie à utiliser pour appliquer cette méthode des caractéristiques courtes aux schémas itératifs ALI puis GS/SOR.

### 2.1.2.1 Schéma itératif ALI

Dans un premier temps, on calcule l'opérateur approché  $\Lambda^*$  en tout point de la grille, c'est-à-dire les éléments diagonaux de  $\Lambda$ . Pour tout point  $k$  de la grille, la solution formelle s'écrit  $\bar{J}_k = \sum_j \Lambda_{kj} S_j$  et le terme diagonal  $\Lambda_{kk}$  correspond au coefficient devant  $S_k$  : il suffit donc de poser  $I_u = 0$  et  $S_u = S_d = 0$ ,  $S_o = 1$  dans l'Eq. (2.17) et on obtient  $\Lambda_{kk} = \Psi_o$ .

On va maintenant détailler la suite d'opérations à effectuer pour une itération. On doit d'abord calculer l'intensité moyenne sur toute la grille. Pour cela, on parcourt la grille spatiale deux fois (voir Fig. 2.2) : tout d'abord dans la direction  $-\Omega$ , c'est-à-dire de la surface à la base de l'atmosphère considérée, puis dans le sens opposé, suivant la direction montante  $+\Omega$  de la base à la surface.

Le calcul de  $\bar{J}$  aux bords de la grille est direct puisque, pour les applications qui nous intéressent comme les couches "isolées", le rayonnement incident sera connu via les conditions aux limites. Sinon, dans le cas de "conditions aux limites périodiques", pour modéliser des couches se répétant à l'infini, on pourra se reporter par exemple à Auer et al. [9] en 2D.

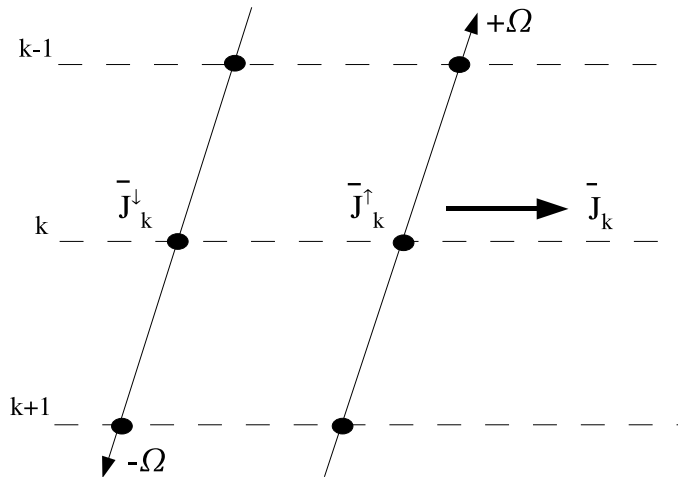


Fig. 2.2: Illustration de la mise en œuvre de ALI avec la méthode des caractéristiques courtes en 1D. Pour calculer  $\bar{J}$ , on parcourt la grille spatiale deux fois. Tout d'abord, dans la direction  $-\Omega$ , on calcule en chaque point  $k$   $\bar{J}_k^{(1)}$ . Puis dans le sens montant, on calcule en chaque point  $k$   $\bar{J}_k^{(\dagger)}$ . On termine en formant  $\bar{J}_k = \bar{J}_k^{(\dagger)} + \bar{J}_k^{(1)}$ .

Lors du premier balayage descendant, on calcule en chaque point  $k$  un  $\bar{J}_k$  partiel, noté  $\bar{J}_k^{(1)}$ , qui est l'intrégrale de l'intensité spécifique  $I_k$  sur toutes les directions descendantes ( $\mu < 0$ )



$$\bar{J}_k^{(\downarrow)} = \int_{-1}^0 \frac{d\mu}{2} I_k^{(\downarrow)}(\mu), \quad (2.18)$$

$I_k^{(\downarrow)}(\mu)$  étant calculée par la méthode des caractéristiques courtes via l'Eq. (2.17).

Une fois ce premier balayage terminé, on repart dans le sens opposé, pour calculer en chaque point  $k$ ,  $\bar{J}_k^{(\uparrow)}$ , l'intégrale de l'intensité spécifique, sur toutes les directions montantes ( $\mu > 0$ ) :

$$\bar{J}_k^{(\uparrow)} = \int_0^1 \frac{d\mu}{2} I_k^{(\uparrow)}(\mu), \quad (2.19)$$

On peut ainsi déterminer l'intensité moyenne en chaque point  $k$  de la grille en formant  $\bar{J}_k = \bar{J}_k^{(\uparrow)} + \bar{J}_k^{(\downarrow)}$ . Il suffit ensuite d'appliquer l'Eq. (2.5) pour mettre à jour la fonction source, et passer à l'itération suivante.

### 2.1.2.2 Schémas itératifs de Gauss-Seidel et SOR

Comme pour le schéma itératif ALI, la solution formelle est obtenue en balayant la grille d'abord dans la direction  $-\Omega$  ( $\mu < 0$ ) c'est-à-dire de la surface à la base de l'atmosphère considérée par exemple, puis dans le sens opposé, direction montante  $+\Omega$  ( $\mu > 0$ ) de la base à la surface.

Pour la méthode ALI, on calcule le champ de rayonnement sur toute la grille puis on met à jour la fonction source pour tous les points de la grille en même temps. Maintenant, pour la méthode GS, dès qu'on a une valeur de la fonction source mise à jour en un point  $j$  de la grille, on l'utilise pour calculer l'intensité moyenne au point  $(j+1)$  et mettre à jour la fonction source  $S_{j+1}$  *immédiatement* avant de passer au point suivant. La fonction source est donc mise à jour pas à pas, au cours du balayage montant de la grille.

Tout d'abord, comme pour la méthode ALI, on calcule en phase descendante, à chaque position spatiale  $k$ ,  $\bar{J}_k^{(\downarrow)}$  avec les valeurs de la fonction source calculées à l'itération précédente.

En phase montante, connaissant le rayonnement incident sur la couche inférieure  $k = N$ , on peut calculer  $\bar{J}_N^{(\uparrow)}$  et en déduire  $\bar{J}_N = \bar{J}_N^{(\downarrow)} + \bar{J}_N^{(\uparrow)}$ . A ce stade, on met donc immédiatement à jour la fonction source  $S_N^{(\text{new})}$  en utilisant les Eqs. (2.6) et (2.7).

On va maintenant expliciter ce qui se passe à un point intérieur  $k$  *quelconque* sachant que la mise à jour de la fonction source a été faite au point précédent  $(k+1)$  (voir Fig. 2.3). L'intensité spécifique en ce point  $k$  s'écrit conformément à l'Eq. (2.17) :

$$I_k^{(\uparrow)} = I_{k+1}^{(\uparrow)} e^{-\Delta\tau_{k+1}^{(\uparrow)}} + \Psi_{k+1}^{(\uparrow)} S_{k+1}^{(\text{new})} + \Psi_k^{(\uparrow)} S_k^{(\text{old})} + \Psi_{k-1}^{(\uparrow)} S_{k-1}^{(\text{old})}. \quad (2.20)$$

On en déduit l'intensité moyenne montante  $\bar{J}_k$  par intégration sur les angles et les fréquences de l'intensité spécifique. Mais, pour obtenir l'intensité moyenne totale  $\bar{J}_k^{(\text{old and new})}$ ,

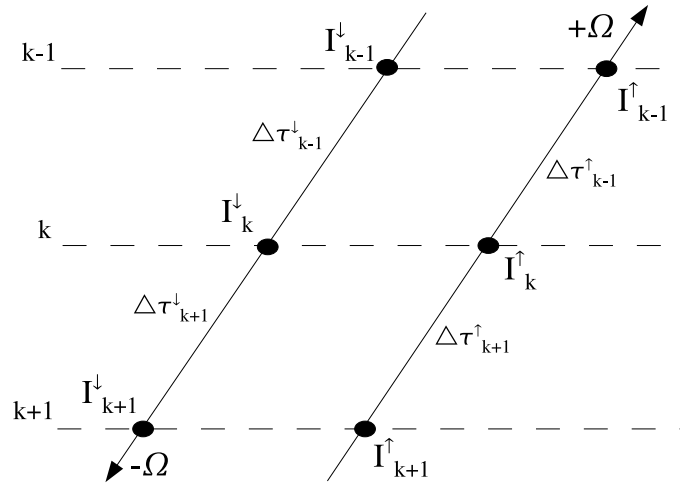


Fig. 2.3: Illustration de la mise en œuvre de Gauss-Seidel avec la méthode des caractéristiques courtes en 1D. On parcourt la grille spatiale deux fois. Tout d'abord, dans la direction descendante  $-\Omega$ , on calcule en chaque point  $k$   $\bar{J}_k^{(\downarrow)}$ . On se place maintenant à un point intérieur  $k$  *quelconque*, lors du balayage montant, sachant que la fonction source a déjà été mise à jour aux points  $k = N, \dots, (k+1)$ . On calcule  $I_k^{(\uparrow)}$  selon l'Eq. (2.17) puis  $\bar{J}_k = \bar{J}_k^{(\uparrow)} + \bar{J}_k^{(\downarrow)} + \Delta \bar{J}_k^{(\downarrow)}$ , où  $\bar{J}_k^{(\downarrow)}$  est donné par l'Eq. (2.22). On met à jour la fonction source  $S_k^{(\text{new})}$  *immédiatement*. On doit alors corriger  $I_k^{(\uparrow)}$  selon l'Eq. (2.23), avant de passer au point suivant  $(k-1)$ .

il faut se rappeler qu'en phase descendante l'intensité spécifique a été calculée au moyen des quantités :

$$I_k^{(\downarrow)} = I_{k-1}^{(\downarrow)} e^{-\Delta\tau_{k-1}^{(\downarrow)}} + \Psi_{k-1}^{(\downarrow)} S_{k-1}^{(\text{old})} + \Psi_k^{(\downarrow)} S_k^{(\text{old})} + \Psi_{k+1}^{(\downarrow)} S_{k+1}^{(\text{old})}, \quad (2.21)$$

donc en utilisant  $S_{k+1}^{(\text{old})}$  alors qu'il faudrait utiliser la nouvelle valeur  $S_{k+1}^{(\text{new})}$  après mise à jour. On doit donc *corriger* l'intensité spécifique descendante afin d'obtenir l'intensité moyenne totale compatible avec la mise à jour en  $k$ . Cela revient à ajouter à l'intensité moyenne le terme correctif

$$\Delta \bar{J}_k^{(\downarrow)} = \left( S_{k+1}^{(\text{new})} - S_{k+1}^{(\text{old})} \right) \int_{-1}^0 \frac{d\mu}{2} \Psi_{k+1}^{(\downarrow)}, \quad (2.22)$$

soit  $\bar{J}_k = \bar{J}_k^{(\uparrow)} + \bar{J}_k^{(\downarrow)} + \Delta \bar{J}_k^{(\downarrow)}$ . Ensuite on met à jour la fonction source  $S_k^{(\text{new})}$  via les Eqs. (2.6) et (2.7).

Avant de passer au point suivant  $(k-1)$  pour répéter les étapes qui viennent d'être décrites, il faut aussi corriger l'intensité spécifique  $I_k^{(\uparrow)}$  qui a été calculée en utilisant  $S_k^{(\text{old})}$  alors qu'on vient juste de mettre à jour la fonction source au point  $k$ . Cela se traduit concrètement par l'ajout à  $I_k^{(\uparrow)}$  du terme suivant

$$\Delta I_k^{(\uparrow)} = \Psi_k^{(\uparrow)} \left( S_k^{(\text{new})} - S_k^{(\text{old})} \right). \quad (2.23)$$

Cette correction est très importante : si elle est oubliée, le schéma itératif résultant

converge plus lentement car on n'a pas alors de vraies itérations Gauss-Seidel.

On répète ces étapes à chaque position spatiale  $k = (N - 1), \dots, 1$  jusqu'à atteindre la couche supérieure. On a alors mis à jour la fonction source sur toute la grille et on peut passer à l'itération suivante, donc au balayage suivant.

On peut aussi mettre en place un schéma itératif Gauss-Seidel/SOR *symétrique*, qui consiste à faire la mise à jour de la fonction source pas à pas *alternativement* lors des phases montantes et lors des phases descendantes comme cela est présenté ici pour les phases montantes, exception faite évidemment de la *première* phase descendante qui est parcourue comme pour la méthode ALI. De cette façon, on diminue encore le nombre d'itérations par rapport à GS, d'un facteur deux environ (Trujillo Bueno & Fabiani Bendicho [134]).

## 2.2 Le transfert 1D multi-niveaux

Dans le cas de l'atome à plusieurs niveaux, le problème du transfert radiatif est plus compliqué car il nécessite la résolution de manière *auto-cohérente* d'un système couplé entre les  $N_{\text{trans}}$  équations du transfert radiatif pour chaque transition radiativement permise, et les  $N_{\text{niveaux}}$  équations de l'équilibre statistique (1.23 ou 1.34), à *chaque profondeur optique*, qui fournissent les populations pour tous les niveaux atomiques.

Dans un souci de simplification, on va se limiter, pour tout ce qui va suivre, au cas de raies qui ne se chevauchent pas et d'un modèle atomique sans transitions libre-lié.

On considère l'approximation déjà utilisée précédemment, en introduisant l'opérateur approché  $\Lambda_{\nu\Omega}^*$  qui donne l'intensité spécifique à partir de la fonction source (Rybicki & Hummer [121]) :

$$I_{\nu\Omega} \simeq \Lambda_{\nu\Omega}^*[S] + (\Lambda_{\nu\Omega} - \Lambda_{\nu\Omega}^*)[S^{(\text{old})}] , \quad (2.24)$$

où  $S^{(\text{old})}$  représente la fonction source déterminée à l'itération précédente.

Pour chaque niveau lié, l'intégrale de diffusion  $\bar{J}$  qui intervient dans les EES va alors se décomposer en :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{J}_{ij} \simeq \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int \phi_{\nu} \Lambda_{\nu\Omega}^*[S] d\nu + \bar{J}_{ij}^{\text{eff}} \\ \bar{J}_{ij}^{\text{eff}} = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int \phi_{\nu} \Lambda_{\nu\Omega}[S^{(\text{old})}] d\nu - \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int \phi_{\nu} \Lambda_{\nu\Omega}^*[S^{(\text{old})}] d\nu \end{array} \right. , \quad (2.25)$$

où le terme  $\bar{J}_{ij}^{\text{eff}}$  ne dépend que de quantités calculées à l'itération précédente. On définit alors :

$$\bar{\Lambda}_{ij}^* = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int \phi_{\nu} \Lambda_{\nu\Omega}^* d\nu , \quad (2.26)$$

ce qui permet d'obtenir une expression plus simple de  $\bar{J}_{ij}^{\text{eff}}$  :

$$\bar{J}_{ij}^{\text{eff}} = \bar{J}_{ij} - \bar{\Lambda}_{ij}^* S_{ij}. \quad (2.27)$$

Ensuite on insère l'Eq. (1.20) écrite en CRD dans l'Eq. (2.24) et on peut réécrire le taux radiatif net pour la transition  $i \leftrightarrow j$  comme

$$(n_j B_{ji} - n_i B_{ij}) \bar{J}_{ij} \simeq n_i A_{ij} \bar{\Lambda}_{ij}^* + (n_j B_{ji} - n_i B_{ij}) \bar{J}_{ij}^{\text{eff}}, \quad (2.28)$$

que l'on insère dans les EES-Eqs. (1.23).

Ainsi, à chaque itération, pour toutes les profondeurs de la couche, on va maintenant résoudre les EES *préconditionnées* suivantes :

$$\begin{aligned} & \sum_{j < i} [n_i A_{ij} (1 - \bar{\Lambda}_{ij}^*) - (n_j B_{ji} - n_i B_{ij}) \bar{J}_{ij}^{\text{eff}}] \\ & - \sum_{j > i} [n_j A_{ji} (1 - \bar{\Lambda}_{ij}^*) - (n_i B_{ij} - n_j B_{ji}) \bar{J}_{ij}^{\text{eff}}] \\ & + \sum_j (n_i C_{ij} - n_j C_{ji}) = 0, \end{aligned} \quad (2.29)$$

### 2.2.1 Le schéma itératif MALI (*Multilevel $\Lambda$ -Iteration*)

La méthode MALI généralise la méthode ALI au cas de l'atome à plusieurs niveaux. On utilisera à nouveau la méthode des caractéristiques courtes pour résoudre les  $N_{\text{trans}}$  équations du transfert radiatif intervenant dans la résolution du problème de transfert radiatif hors-ETL. L'intensité spécifique, obtenue par l'Eq. (2.17) par calcul pas à pas lors de la phase montante, doit être calculée *pour chaque transition radiativement permise*.

Concrètement, l'algorithme se présente comme suit, pour une itération :

#### schéma itératif MALI

**Pour** chaque transition permise  $i \leftrightarrow j$

- calcul des fonctions sources  $S_{ij}$  et des coefficients d'absorption  $\chi_{ij}$  pour chaque profondeur de la couche.
- calcul de  $\bar{\Lambda}_{ij}^*$  et de  $\bar{J}_{ij}$  pour chaque profondeur de la couche grâce à la méthode des caractéristiques courtes.
- calcul de  $\bar{J}_{ij}^{\text{eff}}$  via Eq. (2.27) pour chaque profondeur de la couche.

**Fin pour**

**Résolution** des EES préconditionnées pour chaque profondeur, par inversion du système des Eqs. (2.29), pour obtenir les populations mises à jour pour chaque niveau et à toutes les profondeurs.

### 2.2.2 Le schéma itératif GSM/SOR (*Gauss-Seidel Multi-niveaux*)

Ce travail a fait l'objet d'une publication insérée ci-après (Paletou & Léger [109]) dont je vais souligner les points importants.

Je vais ici généraliser le schéma itératif de Gauss-Seidel au cas de l'atome à plusieurs niveaux, en le mettant en œuvre à l'aide de la méthode des caractéristiques courtes précédemment décrites. Il y a deux différences principales avec la méthode MALI. Tout d'abord le calcul de l'opérateur approché  $\Lambda^*$ , pour toutes les transitions permises, se fera pas à pas en même temps que le calcul de l'intensité moyenne  $\bar{J}$ . Ensuite les termes correctifs apparaissant dans le calcul de  $\bar{J}$  (Eq. 2.22) et de l'intensité spécifique (Eq. 2.23) seront calculés différemment.

**Le sens de parcours.** On parcourt la grille tout d'abord de la surface de l'atmosphère à  $k = 0$ , jusqu'à la couche inférieure à  $k = N$  selon la direction  $-\Omega$ . Par analogie avec la stratégie numérique GS/SOR dans le cas de l'atome à deux niveaux, on va maintenant, dans le cas de l'atome à plusieurs niveaux, mettre à jour toutes les populations à chaque profondeur successive  $k = N, \dots, 1$  *tandis que l'on parcourt la grille dans le sens opposé montant  $+\Omega$* , depuis le bas jusqu'à la surface de l'atmosphère. On inverse pour cela, à *chaque profondeur successive*, le système des EES préconditionnées de la méthode MALI donné par l'Eq. (2.29), *avant* de passer au pas suivant.

**Le calcul à un point intérieur  $k$  quelconque.** On se réfère à la Fig. (2.3) utilisée au § 2.1.2.2 page 26. L'algorithme est décrit en détails pages 36 et 37.

Retenons que la mise à jour des populations à la profondeur  $(k + 1)$  qui vient juste d'être faite, en inversant le système des Eqs. (2.29), a modifié, *pour chaque transition permise*, les coefficients d'absorption et les fonctions source pour chaque raie. Il est *très important* de tenir compte de ces modifications dans le calcul de la caractéristique courte le long du trajet de  $(k + 1)$  à  $k$ , surtout au niveau des trois coefficients  $\Psi_i^{(\uparrow)}$ .

Ainsi il faut recalculer l'intensité spécifique obtenue en phase descendante  $I_k^{(\downarrow)}$ , via l'Eq. (22) page 37, afin d'obtenir l'intensité moyenne totale compatible avec la mise à jour en  $k$ . Puis l'intensité spécifique montante  $I_k^{(\uparrow)}$  est calculée de manière simple via l'Eq. (19) page 36. On peut alors calculer l'opérateur local  $\bar{\Lambda}_{ij}^*$  et l'intensité moyenne  $\bar{J}_{ij}$  pour toutes les transitions permises, puis  $\bar{J}_{ij}^{\text{eff}}$  via l'Eq. (2.27). Ensuite, on injecte ces quantités dans les EES préconditionnées et finalement on met à jour *immédiatement* les populations locales  $\{n_j^{(\text{new})}\}_k$ .

De manière analogue à la correction faite par l'Eq. (2.23) dans le cas de l'atome à deux niveaux, il est important de prendre en compte les modifications engendrées par la mise à jour des populations, au point courant  $k$ , avant de passer au point suivant  $(k - 1)$ . On termine donc les mises à jour au point  $k$  lors du passage montant par le calcul du terme  $I_k^{(\uparrow), (\text{new})}$  via l'Eq. (23) page 37.

**Mise en place de SOR.** Pour mettre en place un schéma itératif SOR multi-niveaux, il suffit, à chaque pas  $k$ , de mettre à jour toutes les populations des niveaux excités via l'Eq. (24) page 37.

**Algorithme de calcul.** D'un point de vue algorithmique, j'insiste sur quelques "recettes" élémentaires. La première est l'ordre correct des différentes boucles de la plus extérieure à la plus intérieure :

1. les directions ( $\pm\Omega$ ) le long desquelles on parcourt la couche,
2. le nombre de transitions radiativement permises,
3. les cosinus directeurs (c'est-à-dire les  $\mu$  usuels),
4. les fréquences.

La seconde concerne les quelques variables à garder en mémoire, comme tous les  $I_k^{(\downarrow), (\text{old})}$  lors de la phase descendante  $-\Omega$ .

**Conclusion.** On retiendra la supériorité du schéma itératif SOR sur MALI pour des grilles très discrétisées spatialement : sur la Fig. (2) de l'article, il apparaît un gain d'un facteur  $\simeq 8$  dans le nombre d'itérations lorsqu'on itère jusqu'au bruit numérique pour un temps de calcul par itération comparable, comme indiqué sur le Tab. (1) de l'article. De plus, on notera qu'atteindre une faible valeur de  $R_c$ , qui est le paramètre de contrôle du processus itératif le plus direct, *ne garantit pas* nécessairement la convergence du processus (Fabiani Bendicho et al. [44]). Cela est montré sur les courbes GS de la Fig. (4) de l'article. Par contre, sur la même figure, on remarque que SOR est un processus qui permet plus de maîtrise du schéma itératif.

Le besoin d'avoir un critère d'arrêt fiable est bien sûr critique pour n'importe quelle méthode itérative. Dans le cas du transfert numérique, Auer et al. [9] et Fabiani Bendicho et al. [44] ont trouvé une solution satisfaisante en adoptant la méthode multi-grille qui va maintenant être présentée.



Journal of Quantitative Spectroscopy &  
Radiative Transfer 103 (2007) 57–66

Journal of  
Quantitative  
Spectroscopy &  
Radiative  
Transfer

[www.elsevier.com/locate/jqsrt](http://www.elsevier.com/locate/jqsrt)

## Fast multilevel radiative transfer

Frédéric Paletou\*, Ludovick Léger

*Université Paul Sabatier, Toulouse 3, Observatoire Midi-Pyrénées, Laboratoire d'Astrophysique de Toulouse–Tarbes (CNRS/UMR 5572),  
14 ave. Edouard Belin, F-31400 Toulouse, France*

Received 5 May 2006; received in revised form 30 June 2006; accepted 4 July 2006

### Abstract

The vast majority of recent advances in the field of numerical radiative transfer relies on approximate operator methods better known in astrophysics as Accelerated Lambda-Iteration (ALI). A superior class of iterative schemes, in term of rates of convergence, such as Gauss–Seidel and successive overrelaxation methods were therefore quite naturally introduced in the field of radiative transfer by Trujillo Bueno and Fabiani Bendicho [A novel iterative scheme for the very fast and accurate solution of non-LTE radiative transfer problems. *Astrophys J* 1995;455:646]; it was thoroughly described for the non-LTE two-level atom case. We describe hereafter in details how such methods can be generalized when dealing with non-LTE unpolarised radiation transfer with multilevel atomic models, in monodimensional geometry.

© 2006 Elsevier Ltd. All rights reserved.

**Keywords:** Non-LTE plasmas; Astrophysics; Radiative transfer

### 1. Introduction

Our ability to deal with complex radiative transfer problems has considerably improved during the last 10 years. It is indeed still worth an effort since important issues of astrophysical interest may require to address a number of cases ranging from multi-dimensional problems in various geometries [2–6] to polarised radiation transfer involving complex atomic models [7,8], for instance.

Most of the recent developments in the field of numerical radiation transfer are based on the approximate (or accelerated) lambda-iteration (ALI) scheme which has been recently reviewed in [9]. ALI methods are based on operator splitting and, in a seminal article, Olson et al. [10] demonstrated the merits of adopting an approximate operator which is nothing more than the exact diagonal of the full operator  $\mathcal{A}$  allowing the determination of the radiation field from a known source function (see [11,12]). More generally speaking such an efficient iterative scheme is better known as the Jacobi's method in numerical analysis [13].

However, even if superior—in term of higher rates of convergence—iterative schemes based on the Gauss–Seidel (GS) and the successive overrelaxation (SOR) methods have been introduced since in the field of numerical radiative transfer, they still deserved too little attention by the astrophysical community. GS/SOR methods have been described in detail in a landmark article [1]; in particular, the practical description of how to implement GS/SOR iterations within a regular short characteristics (SC) formal solver is very meticulously

\*Corresponding author.

E-mail address: [fpaletou@ast.obs-mip.fr](mailto:fpaletou@ast.obs-mip.fr) (F. Paletou).



written and therefore extremely useful. However, their description of the implementation of GS/SOR methods was restricted to the two-level atom case in monodimensional (1D) geometry.

In a subsequent article [4], although mentions to GS/SOR iterative schemes generalized to the multilevel atom transfer problems can be found, their implementation is far from being made explicit and it is only described in very general terms; it is furthermore embedded in another (very efficient though) numerical strategy based on multi-grid methods [14,15]. Unfortunately, it appears that the basic features of a GS/SOR-based formal solver in the frame of the multilevel atom radiative transfer problem remain, so far, to be made explicit.

The present article aims indeed at filling the gap by providing all the elements required for a successful implementation of *multilevel* GS/SOR iterative schemes in 1D geometry. We shall recall in Section 2 the basic principles of GS/SOR iterative schemes in the case of a two-level atom model. Then, in Section 3 we shall describe step by step how GS/SOR can be implemented for the case of multi-level atom models, therefore extending the well-known multilevel-ALI method of Rybicki and Hummer [16]. Finally, we shall present in Section 4 some illustrative examples clearly demonstrating the performances of multilevel GS/SOR iterative schemes.

## 2. GS and SOR iterative schemes basics

GS and SOR iterative scheme are particularly well adapted to the SC method for the formal solution of the radiative transfer equation [2,17,18].

Using SC in 1D geometry indeed, the formal solution is obtained by sweeping the grid say, first in direction  $-\Omega$  ( $\mu < 0$ ) i.e. from the surface down to the bottom of the atmosphere, and then in the opposite, upward direction  $+\Omega$  ( $\mu > 0$ ) starting from the bottom of the atmosphere up to its surface though. The specific intensity  $I_{\nu\Omega}$  is advanced step by step during each pass, partially integrated over angles and frequencies during the downward pass while, during the second (upward) pass, the mean intensity  $\bar{J}$  can be fully computed, completing therefore the formal solution at each depth

$$\bar{J}_k = A[S_k]. \quad (1)$$

Except at the boundaries where the illumination conditions are known a priori, along each direction, the specific intensity at the inner grid points is advanced depth after depth, and computed along the SC (allowing us to suppress any index related to the angle variation of the specific intensity hereafter) according to

$$I_o = I_u e^{-\Delta\tau_u} + \Psi_u S_u + \Psi_o S_o + \Psi_d S_d, \quad (2)$$

where the first part of the right-hand side of this expression corresponds to the part transmitted from the “upwind” grid point  $u$  down to the current point  $o$  (see Fig. 1), and the three last terms result from the analytic integration of

$$Y = \int_0^{\Delta\tau_u} S(\tau) e^{-\tau} d\tau \quad (3)$$

along the SC going from  $u$  to  $o$ . Indeed, assuming that  $S$  is quadratic in the optical depth  $\tau$ , it is easy to show, using a simple Lagrange polynomial interpolation on the basis of three consecutive grid points  $u$ ,  $o$  and  $d$ , that

$$Y = \Psi_u S_u + \Psi_o S_o + \Psi_d S_d, \quad (4)$$

where the  $\Psi$ 's coefficients are defined<sup>1</sup> as

$$\begin{cases} \Psi_u = \frac{w_2 + w_1 \Delta\tau_d}{\Delta\tau_u(\Delta\tau_u + \Delta\tau_d)}, \\ \Psi_o = w_0 + \frac{w_1(\Delta\tau_u - \Delta\tau_d) - w_2}{\Delta\tau_u \Delta\tau_d}, \\ \Psi_d = \frac{w_2 - w_1 \Delta\tau_u}{\Delta\tau_d(\Delta\tau_u + \Delta\tau_d)}, \end{cases} \quad (5)$$

<sup>1</sup>A different expression was used in [2], Eqs. (8)–(10); note also that there is a sign error in their coefficients  $d_1$  and  $d_2$ . But more important is to adopt the current expansion in terms of  $\Psi$ 's for the efficient implementation of GS/SOR.



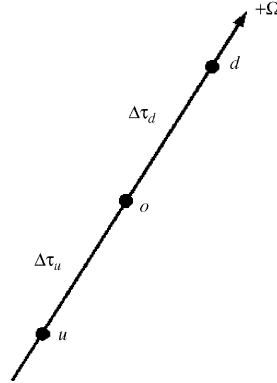


Fig. 1. Three successive grid points along direction  $+\Omega$  (upward) are used, assuming parabolic interpolation of the source function, in order to compute the specific intensity at current position  $o$  along the short characteristics starting from  $u$ .

and where

$$\begin{cases} w_0 = 1 - e^{-\Delta\tau_u}, \\ w_1 = w_0 - \Delta\tau_u e^{-\Delta\tau_u}, \\ w_2 = 2w_1 - \Delta\tau_u^2 e^{-\Delta\tau_u}. \end{cases} \quad (6)$$

In the *two-level atom case*, the non-LTE line source function  $S$  is usually expressed as

$$S(\tau) = (1 - \varepsilon)\bar{J}(\tau) + \varepsilon B(\tau), \quad (7)$$

where  $\tau$  is the optical depth,  $\varepsilon$  is the collisional destruction probability measuring departures from LTE,  $B$  the Planck function and  $\bar{J}$  is the usual mean intensity

$$\bar{J} = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int \phi_\nu I_{\nu\Omega} d\nu, \quad (8)$$

where we omitted the optical depth dependence for simplicity.

The Jacobi type iterative scheme introduced in numerical radiative transfer by [10] allows for the iterative determination of the source function on the basis of increments such that

$$\Delta S_k = \frac{(1 - \varepsilon)\bar{J}_k^{(\text{old})} + \varepsilon B_k - S_k^{(\text{old})}}{1 - (1 - \varepsilon)A_{kk}}, \quad (9)$$

at each depth  $\tau_k$ , where the superscript (old) denotes quantities already known from the previous iterative stage and where  $A_{kk}$  is a *scalar* equal to the diagonal element of the full operator  $A$  at such a depth in the atmosphere.

Within a GS iterative scheme the source function increments now turn themselves into

$$\Delta S_k^{(\text{GS})} = \frac{(1 - \varepsilon)\bar{J}_k^{(\text{old and new})} + \varepsilon B_k - S_k^{(\text{old})}}{1 - (1 - \varepsilon)A_{kk}}, \quad (10)$$

where the somewhat enigmatic quantity  $\bar{J}_k^{(\text{old and new})}$  means that at the spatial point  $k$  the mean intensity has to be calculated via a formal solution of the transfer equation using the “new” source function values  $S_j^{(\text{new})}$  already obtained at points  $j = 1, 2, \dots, (k - 1)$ , and the “old” source function values  $S_j^{(\text{old})}$  at points  $j = k, (k + 1), \dots, \text{ND}$ .

Achieving this was explained in every detail in [1] and we shall not repeat here the algorithmics of the process. It is however important to repeat that such a scheme is better implemented in the frame of the SC approach since it allows to avoid any explicit matrix inversion.

Finally, going beyond GS, SOR iterations can be implemented where

$$\Delta S_k^{(\text{SOR})} = \omega \Delta S_k^{(\text{GS})}, \quad (11)$$

$\omega$  being, in the case of *overrelaxation*, a parameter such that  $1 < \omega < 2$ , with an optimal value  $\sim 1.5$  for the two-level atom case [1].

However, in the non-LTE multilevel atom case, the radiation transfer problem is somewhat more complicated since it is now required to solve *self-consistently* for the coupled set of  $N_{\text{trans}}$  radiative transfer equations, for all radiatively allowed transitions, together with a set of  $N_{\text{levels}}$  equations of the statistical equilibrium (ESE) at each optical depth giving the populations numbers for all atomic levels.

### 3. The multilevel atom case

Hereafter, we shall describe in detail how the GS/SOR numerical method can be implemented for the case of multilevel atom models in 1D geometry. For simplicity we shall consider the case of non-overlapping lines with no background continuum.

#### 3.1. The MALI method: an overview

ALI methods have been first generalized to the multilevel atom case by Rybicky and Hummer [16,19]. Their MALI method consists in the *preconditioning* of the ESE using an approximate operator  $\tilde{A}_{ul}^*$  and a  $\tilde{J}_{ul}^{\text{eff}}$  mean intensity defined hereafter, and computed, for all allowed transitions  $u \leftrightarrow l$ , from quantities known from the previous iterative step.

Generally speaking, the line source function for a radiative transition between the two bound atomic levels  $u$  (i.e., the upper energy level) and  $l$  (respectively, the lower one) can be written in terms of the density of populations  $n_{u,l}$ , the Einstein [20] coefficients for spontaneous emission  $A_{ul}$ , absorption  $B_{lu}$  and stimulated emission  $B_{ul}$ , and the line absorption  $\phi_v$  and emission  $\psi_v$  profiles such as

$$S_{ul}(v) = \frac{n_u A_{ul} \psi_v}{n_l B_{lu} \phi_v - n_u B_{ul} \psi_v}. \quad (12)$$

Hereafter, we shall however restrict our study to complete redistribution in frequency for which absorption and emission profiles are identical, i.e.  $\phi_v \equiv \psi_v$ , and therefore, the line source function remains *independent* of the frequency. It is indeed well-known that such an assumption remains valid for most of the spectral lines; however, partial redistribution in frequency effects should be considered, at the cost of more computational work, for a proper description of resonance line formation in a diluted medium (e.g., [21] and references therein).

Furthermore, leaving out bound-free transitions, at each depth in the atmosphere, the ESE are usually expressed as a set of  $N_{\text{levels}}$  elementary equations such that

$$\sum_{j < i} [n_i A_{ij} - (n_j B_{ji} - n_i B_{ij}) \tilde{J}_{ij}] - \sum_{j > i} [n_j A_{ji} - (n_i B_{ij} - n_j B_{ji}) \tilde{J}_{ij}] + \sum_j (n_i C_{ij} - n_j C_{ji}) = 0, \quad (13)$$

where the  $C_{ij}$  are collisional excitation/deexcitation rates. Now, introducing the approximate operator into the ESE via the ALI approximation

$$I_{v\Omega} \simeq A_{v\Omega}^*[S] + (A_{v\Omega} - A_{v\Omega}^*)[S^{(\text{old})}], \quad (14)$$

where  $S^{(\text{old})}$  represents the source function known from previous iteration and, defining

$$\begin{cases} \tilde{J}_{ij} \simeq \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int \phi_v A_{v\Omega}^*[S] dv + \tilde{J}_{ij}^{\text{eff}}, \\ \tilde{J}_{ij}^{\text{eff}} = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int \phi_v (A_{v\Omega} - A_{v\Omega}^*)[S^{(\text{old})}] dv, \end{cases} \quad (15)$$

where  $\bar{J}_{ij}^{\text{eff}}$  depends only on known quantities, we can establish<sup>2</sup> after [16] the following set of preconditioned equations

$$\begin{aligned} & \sum_{j < i} [n_i A_{ij}(1 - \bar{A}_{ij}^*) - (n_j B_{ji} - n_i B_{ij}) \bar{J}_{ij}^{\text{eff}}] - \sum_{j > i} [n_j A_{ji}(1 - \bar{A}_{ij}^*) - (n_i B_{ij} - n_j B_{ji}) \bar{J}_{ij}^{\text{eff}}] \\ & + \sum_j (n_i C_{ij} - n_j C_{ji}) = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

where

$$\bar{A}_{ij}^* = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int \phi_v A_{v\Omega}^* dv. \quad (17)$$

Heinzel [22] and Paletou [21] showed how to take care self-consistently of the ionization equilibrium within the MALI approach by adding a Newton–Raphson scheme to it, for the determination of the electron density from a set of non-linear ESE taking into account all kind of bound-free transitions; the same can be done within the new GS/SOR multilevel numerical schemes.

### 3.2. Expliciting GS/SOR with multilevel atoms

Assume that one has *already* swept the grid *once*, say from the illumination-free surface of the atmosphere at  $k = 0$ , down to the bottom boundary at  $k = \text{ND}$  along direction  $-\Omega$ . By analogy with the GS/SOR numerical strategy for the two-level atom case, in the multilevel atom case we are now going to update all population numbers at successive depths  $k = \text{ND}, \dots, 1$  while *sweeping back the grid along the opposite, upward direction  $+\Omega$* .

Now the population update will be made depth after depth, from the bottom, up to the surface of the atmosphere by inverting the MALI preconditioned set of ESE given in Eq. (16) *before* passing to the next depth point. It is a quite straightforward task at the lower boundary surface since the incident radiation field is known a priori from the (given) external conditions of illumination.

The situation is however a bit more tricky at the inner grid points. Once the populations at depth  $(k + 1)$  have been updated, we shall advance along direction  $+\Omega$  to the next grid point at depth  $k$ . But having changed  $\{n_j^{\text{(old)}}\}_{(k+1)}$  to  $\{n_j^{\text{(new)}}\}_{(k+1)}$  means that the local absorption coefficients  $\chi_{(k+1)}$  and the source functions for all allowed transitions have to be changed accordingly, as well as the upwind optical depth  $\Delta\tau_{(k+1)}^{(\uparrow)}$  along the path from depth  $(k + 1)$  to depth  $k$ . As a consequence, the three coefficients  $\Psi_d^{(\uparrow)}$  [ $d = (k - 1), k, (k + 1)$ ] used for the evaluation of the specific intensity along the SC are also affected by the local population change and thus need to be updated. But since  $\Delta\tau_{(k+1)}^{(\uparrow)} = \Delta\tau_{(k-1)}^{(\downarrow)}$  evaluations of the specific intensities made during the first downward pass must also be corrected accordingly, for consistency.

So the major point in such implementation is to carefully “propagate” the effects of the local population update. Let us, for instance, consider the specific intensity evaluation at any inner grid point  $k$  in, respectively, direction  $-\Omega$  for which we shall use  $(\downarrow)$  superscripts, and  $+\Omega$  (resp.  $(\uparrow)$  superscripts); we can therefore write, following Eq. (2)

$$I_k^{(\downarrow)} = I_{k-1}^{(\downarrow)} e^{-\Delta\tau_{(k-1)}^{(\downarrow)}} + \Psi_{k-1}^{(\downarrow)} S_{k-1} + \Psi_k^{(\downarrow)} S_k + \Psi_{k+1}^{(\downarrow)} S_{k+1}, \quad (18)$$

while, at the same depth but in the opposite direction, we have

$$I_k^{(\uparrow)} = I_{k+1}^{(\uparrow)} e^{-\Delta\tau_{(k+1)}^{(\uparrow)}} + \Psi_{k+1}^{(\uparrow)} S_{k+1} + \Psi_k^{(\uparrow)} S_k + \Psi_{k-1}^{(\uparrow)} S_{k-1}. \quad (19)$$

Since the update of the population numbers at depth  $(k + 1)$  have just been done by inverting the system of Eq. (16), this generates *for each allowed transition* changes in the absorption coefficients at line center, now becoming

$$\chi_{(k+1)}^{(\text{new})} = \left( \frac{h\nu_{ul}}{4\pi} \right) [n_l^{(\text{new})} B_{lu} - n_u^{(\text{new})} B_{ul}] \quad (20)$$

<sup>2</sup>Inserting Eq. (12) into Eq. (14) and forming the net radiative rate  $(n_j B_{ji} - n_i B_{ij}) \bar{J}_{ij}$  in terms of  $\bar{A}_{ij}^*$  and  $\bar{J}_{ij}^{\text{eff}}$ .

and in the line source functions, assuming complete redistribution in frequency, turning into

$$S_{(k+1)}^{(\text{new})} = \frac{n_u^{(\text{new})} A_{ul}}{n_l^{(\text{new})} B_{lu} - n_u^{(\text{new})} B_{ul}}. \quad (21)$$

Therefore, one has first to correct  $I_k^{(\downarrow)}$  for consistency since previous changes lead, according to Eq. (18), to

$$I_k^{(\downarrow), (\text{new})} = I_{k-1}^{(\downarrow), (\text{old})} e^{-\Delta\tau_{(k-1)}^{(\downarrow), (\text{old})}} + \Psi_{k-1}^{(\downarrow), (\text{new})} S_{k-1}^{(\text{old})} + \Psi_k^{(\downarrow), (\text{new})} S_k^{(\text{old})} + \Psi_{k+1}^{(\downarrow), (\text{new})} S_{k+1}^{(\text{new})}, \quad (22)$$

which requires that  $I_{k-1}^{(\downarrow), (\text{old})}$  have been saved in memory during the first downward pass. This step is equivalent to the computation of the  $\Delta J_k^{\text{in}}$  correction pointed out in [1], Eq. (39).

Then,  $I_k^{(\uparrow)}$  can be computed in a straightforward manner via Eq. (19), which makes it possible to compute  $\bar{A}_{ij}^*$  and  $\bar{J}_{ij}^{\text{eff}}$  for all allowed transitions, then to inject these quantities in the preconditioned ESE and finally to compute/update locally  $\{n_j^{(\text{new})}\}_k$  while in the middle of the upward pass.

However, before advancing to next depth point  $(k-1)$ , it is important to consider first the various changes induced by the level population changes, respectively, on the source functions  $S_k$ , on the optical depth increments  $\Delta\tau_{(k+1)}^{(\uparrow), (\text{new})}$  and  $\Delta\tau_{(k-1)}^{(\uparrow), (\text{new})}$  as well as, finally, on the three SC coefficients  $\Psi_d^{(\uparrow)}$  [ $d = (k-1), k, (k+1)$ ]. Because of that, we end up all updates at depth  $k$  during the upward pass by the computation of

$$I_k^{(\uparrow), (\text{new})} = I_{k+1}^{(\uparrow)} e^{-\Delta\tau_{(k+1)}^{(\uparrow), (\text{new})}} + \Psi_{k+1}^{(\uparrow), (\text{new})} S_{k+1}^{(\text{new})} + \Psi_k^{(\uparrow), (\text{new})} S_k^{(\text{new})} + \Psi_{k-1}^{(\uparrow), (\text{new})} S_{k-1}^{(\text{old})}. \quad (23)$$

This last stage is analogous to the correction described by Eq. (40) in [1].

Finally, a multilevel SOR iterative scheme is built when, at each depth  $k$ , all the populations of the excited levels are updated according to

$$n_k^{(\text{new})} = n_k^{(\text{old})} + \omega \Delta n_k^{(\text{GS})}, \quad (24)$$

where  $\omega$  is a parameter of the order of 1.5 as discussed below.

### 3.3. Numerical recipes

Several “recipes” should be followed when implementing a GS/SOR solver for multilevel atoms. The first one is to order properly the various loops. From outer to inner loops one may find indeed: (1) the directions ( $\pm\Omega$ ) along which the slab will be swept, (2) the number of allowed radiative transitions, (3) the direction cosines (i.e., the usual  $\mu$ 's) and, finally (4) the frequencies.

Upwind and downwind corrections, as described in Eqs. (22) and (23), require some bookkeeping of variables such as all the  $I_k^{(\downarrow), (\text{old})}$  after the downwind pass  $-\Omega$  for the further computation of the mean intensity entering the preconditioned ESE i.e., Eq. (16).

Finally, it is important to realize that the additional computing time necessary for all the extra-computations required by one GS/SOR iterative step is very small as compared to the huge saving on the whole convergence process with respect to MALI (see Table 1).

## 4. Illustrative examples and discussion

We have adopted the standard benchmark models for multilevel atom problems proposed by Avrett [23] and Avrett and Loeser [24] whose main parameters have also been summarized in Table 2.

The respective rates of convergence for the MALI, GS and SOR multilevel iterative processes are displayed in Fig. 2 where we plotted the maximum relative change on the level populations from an iteration to another,  $R_c$ , for the schematic 3-level H I model. A spatial grid of 20 depth points per decade together with a 8 Gauss–Legendre angular quadrature and constant Doppler profiles were used. It clearly demonstrates how superior to MALI the multilevel SOR iterative scheme can be for such refined grids; and it is worth pointing out here again the importance of grid refinement on the accuracy of ALI-class methods, as demonstrated by Chevallier et al. [25]. Indeed, in such a case a factor of  $\sim 6$  in computing time can be saved, when one iterates the population numbers down to numerical noise, for instance. We report a similar behaviour of the iterative processes when dealing with Avrett's Ca II ion model.

Table 1

Computation time for the 3-level H model of [23] obtained with an Intel Pentium-4 clocking at 3 GHz as a function of the number of depth points per decade  $N_\tau$ ; the stopping criterion was  $R_c = 10^{-10}$  (we also indicate the # of iterations required, respectively)

$N_\tau$	MALI	GS	SOR
5	7.644 s (160)	4.595 s (78)	2.325 s (39)
10	27.852 s (326)	17.148 s (161)	6.096 s (55)
15	59.768 s (483)	38.997 s (239)	10.203 s (63)
20	1 min 43.373 s (634)	1 min 05.879 s (315)	17.213 s (81)
25	2 min 37.637 s (780)	1 min 40.630 s (387)	26.040 s (99)

Table 2

Input parameters for the H I and Ca II multilevel benchmark models of Avrett [23]. Statistical weights are  $g_1 = 2$ ,  $g_2 = 8$ , and  $g_3 = 18$  for H I,  $g_1 = 2$ ,  $g_2 = 4$ ,  $g_3 = 6$ ,  $g_4 = 2$ ,  $g_5 = 4$  for Ca II; the temperature of the atmosphere is 5000 K

Element	$u$	$l$	$A_{ul}$	$C_{ul}$	$v_{ul}$
H	2	1	$4.68 \times 10^8$	$10^5$	$2.47 \times 10^{15}$
H	3	1	$5.54 \times 10^7$	$10^5$	$2.93 \times 10^{15}$
H	3	2	$4.39 \times 10^7$	$10^5$	–
Ca	2	1	Forbidden	$8.2 \times 10^3$	$4.10 \times 10^{14}$
Ca	3	1	Forbidden	$8.2 \times 10^3$	$4.12 \times 10^{14}$
Ca	4	1	$1.4 \times 10^8$	$5.1 \times 10^4$	$7.56 \times 10^{14}$
Ca	5	1	$1.4 \times 10^8$	$5.1 \times 10^4$	$7.63 \times 10^{14}$
Ca	3	2	Forbidden	$10^7$	–
Ca	4	2	$7.8 \times 10^6$	$1.6 \times 10^5$	–
Ca	5	2	$8.1 \times 10^5$	$1.6 \times 10^4$	–
Ca	4	3	Forbidden	$10^3$	–
Ca	5	3	$7.2 \times 10^6$	$1.4 \times 10^5$	–
Ca	5	4	Forbidden	$4.8 \times 10^6$	–

In Fig. 3, we display (solid lines) the source function vs. line optical depth for the three transitions allowed by our schematic H-model. Dashed lines correspond to the old benchmark results of [23]; differences are coming not only from very different numerical schemes but also from large differences in the angular and frequency quadratures. Our results are also in good agreement with those of [26] and may serve, given the high-level of grid refinement we adopted, as new benchmark results for multilevel atom cases.

The main potential drawback of SOR methods is that it relies on the choice of a relaxation parameter  $\omega$  whose optimal value is a priori unknown. However, it was proposed [1] a quite robust numerical procedure in order to estimate *self-consistently* a close-to-optimal  $\omega$  after having run a few “pure GS” iterations. We followed their recommendations and, indeed, found a posteriori values close to “optimal” ones deduced from experimental runs using a prescribed  $\omega$ .

Finally, in Fig. 4, we plotted the history of the convergence error  $C_e$  defined as

$$C_e = \max \left( \frac{|n(itr) - n(\infty)|}{n(\infty)} \right), \quad (25)$$

following [3], where  $itr$  is the iteration number and  $n(\infty)$  is the fully converged solution, and of the relative change  $R_c$  for, respectively, the GS and the SOR multilevel iterative schemes. It is important to note again that reaching a small value of  $R_c$ , which is indeed the most direct control parameter of the iterative process, does *not* necessarily imply a small enough value of  $C_e$  to guarantee convergence; and this is shown by the GS

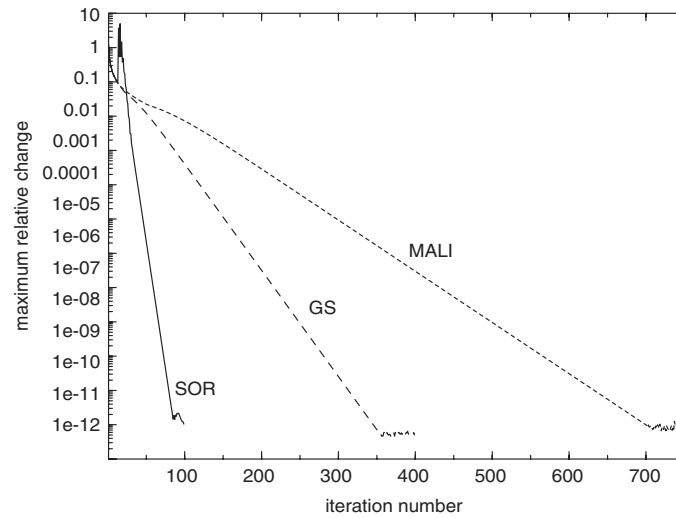


Fig. 2. Rates of convergence for the MALI, Gauss–Seidel and SOR multilevel iterative processes, respectively. A spatial grid of 20 depth points per decade together with a 8 Gauss–Legendre angular quadrature and constant Doppler profiles were used. The atomic model is a 3-level H I model atom taken from [23] (see also Table 2).

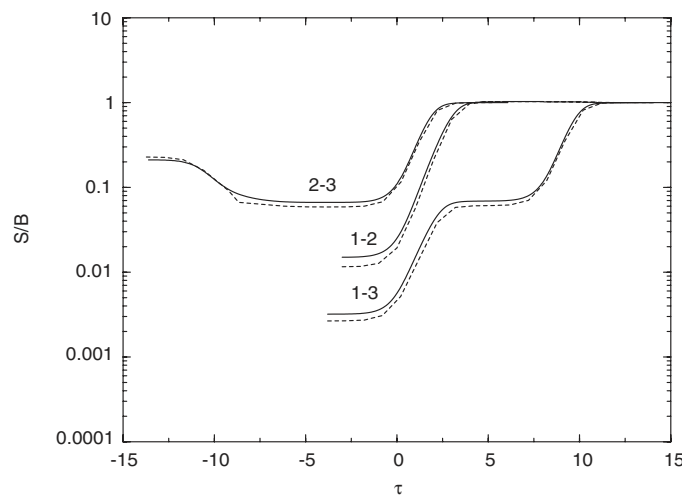


Fig. 3. Source functions vs. optical depth for the three transitions of our H-model. Solid lines are our GS/SOR multilevel results and dashed lines correspond to low-resolution results previously published in [23,26].

curves. However, an optimal SOR iterative process including the self-consistent evaluation of  $\omega$  as proposed in [1], leads to a better-controlled process since  $R_c$  is just slightly lower than  $C_c$ , as shown in Fig. 4.

The issue of having a reliable stopping criterion is of course critical to any iterative method and, for the specific case of numerical radiative transfer, Auer et al. [3] and Fabiani Bendicho et al. [4] addressed it successfully by adopting *multi-grid* methods. We finally refer the reader to this later work where it is

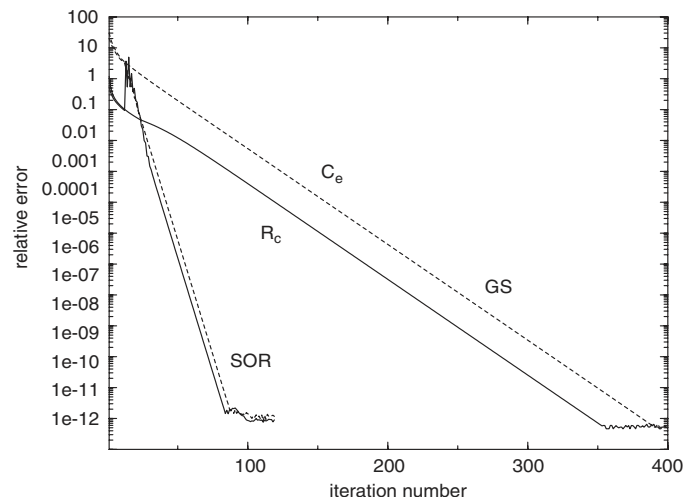


Fig. 4. History of the convergence error  $C_e$  (dashed lines) and of the relative change  $R_c$  (full lines) for, respectively, the GS and the SOR multilevel iterative schemes. Although a small value of  $R_c$  does not necessarily imply a small enough value of  $C_e$  as demonstrated by the GS curves, a SOR iterative process including a self-consistent evaluation of  $\omega$  leads to a scheme such that  $R_c \simeq C_e$ .

demonstrated how the *combination* of GS/SOR iterative schemes together with multi-grid techniques lead to extremely powerful techniques for the solution of complex radiative transfer problems.

### Acknowledgments

Our thanks go to Drs Loïc Chevallier and François Rincon for their careful reading of an early version of this paper. All figures have been made using the freeware package ANA (<http://ana.lmsal.com/>) developed at the Lockheed Martin Solar and Astrophysics Laboratory by Dick Shine and Louis Strous.

### References

- [1] Trujillo Bueno J, Fabiani Bendicho P. A novel iterative scheme for the very fast and accurate solution of non-LTE radiative transfer problems. *Astrophys J* 1995;455:646.
- [2] Auer LH, Paletou F. Two-dimensional radiative transfer with partial frequency redistribution I. General method. *Astron Astrophys* 1994;285:675.
- [3] Auer LH, Fabiani Bendicho P, Trujillo Bueno J. Multidimensional radiative transfer with multilevel atoms. I. ALI method with preconditioning of the rate equations. *Astron Astrophys* 1994;292:599.
- [4] Fabiani Bendicho P, Trujillo Bueno J, Auer LH. Multidimensional radiative transfer with multilevel atoms. II. The non-linear multigrid method. *Astron Astrophys* 1997;324:161.
- [5] van Noort M, Hubeny I, Lanz T. Multidimensional non-LTE radiative transfer. I. A universal two-dimensional short-characteristics scheme for cartesian, spherical, and cylindrical coordinate systems. *Astrophys J* 2002;568:1066.
- [6] Gouttebroze P. Radiative transfer in cylindrical threads with incident radiation. *Astron Astrophys* 2004;413:733.
- [7] Trujillo Bueno J, Manso Sainz R. Iterative methods for the non-LTE transfer of polarized radiation: resonance line polarization in one-dimensional atmospheres. *Astrophys J* 1999;516:436.
- [8] Trujillo Bueno J. In: Hubeny I, Mihalas D, Werner K, editors. ASP conference series, Stellar atmosphere modeling, vol. 288. San Francisco: Astronomical Society of the Pacific; 2003. p. 551.
- [9] Hubeny I. In: Hubeny I, Mihalas D, Werner K, editors. ASP conference series, Stellar atmosphere modeling, vol. 288. San Francisco: Astronomical Society of the Pacific; 2003. p. 17.
- [10] Olson GL, Auer LH, Buchler JR. A rapidly convergent iterative solution of the non-LTE line radiation transfer problem. *JQSRT* 1986;35:431.
- [11] Mihalas D. Stellar atmospheres. San Francisco: Freeman; 1978.

- [12] Rutten RJ. In: Hubeny I, Mihalas D, Werner K, editors. ASP conference series, Stellar atmosphere modeling, vol. 288. San Francisco: Astronomical Society of the Pacific; 2003. p. 99 (see also Radiative Transfer in Stellar Atmospheres, Sterrekundig Instituut Utrecht ([http://www.fys.ruu.nl/~rutten/Astronomy\\_course.html](http://www.fys.ruu.nl/~rutten/Astronomy_course.html))).
- [13] Young DM. Iterative solution of large linear systems. New York: Academic Press; 1971.
- [14] Hackbusch W. Multi-grid methods and applications. Berlin: Springer; 1985.
- [15] Briggs WL, Henson VE, McCormick SF. A multigrid tutorial. Philadelphia, PA: SIAM; 2000.
- [16] Rybicki GB, Hummer DG. An accelerated lambda iteration method for multilevel radiative transfer. I. Non-overlapping lines with background continuum. *Astron Astrophys* 1991;245:171.
- [17] Olson GL, Kunasz PB. Short characteristic solution of the non-LTE line transfer problem by operator perturbation. I. The one-dimensional planar slab. *JQSRT* 1987;38:325.
- [18] Kunasz PB, Auer LH. Short characteristic integration of radiative transfer problems—formal solution in two-dimensional slabs. *JQSRT* 1988;39:67.
- [19] Rybicki GB, Hummer DG. An accelerated lambda iteration method for multilevel radiative transfer. II. Overlapping transitions with full continuum. *Astron Astrophys* 1992;262:209.
- [20] Einstein A. Zur quantentheorie der strahlung. *Phys Z* 1917;18:121.
- [21] Paletou F. Two-dimensional multilevel radiative transfer with standard partial frequency redistribution in isolated solar atmospheric structures. *Astron Astrophys* 1995;302:587.
- [22] Heinzel P. Multilevel NLTE radiative transfer in isolated atmospheric structures: implementation of the MALI-technique. *Astron Astrophys* 1995;299:563.
- [23] Avrett EH. In: Athay RG, Mathis J, Skumanich A, editors. Resonance lines in astrophysics, National Center for Atmospheric Research, Boulder; 1968. p. 27.
- [24] Avrett EH, Loeser R. In: Kalkofen W, editor. Numerical radiative transfer. Cambridge: Cambridge University Press; 1987. p. 135.
- [25] Chevallier L, Paletou F, Rutly B. On the accuracy of the ALI method for solving the radiative transfer equation. *Astron Astrophys* 2003;411:221.
- [26] Atanacković-Vukmanović O, Crivellari L, Simonneau E. A forth-and-back implicit  $A$ -iteration. *Astrophys J* 1997;487:735.





# 3

## Méthode multi-grille

---

Les méthodes multi-grille sont utilisées et bien connues, notamment en hydrodynamique, pour traiter des problèmes nécessitant un raffinement de grille très important, par exemple lorsqu'il y a d'importants gradients spatiaux dans les quantités physiques prises en compte dans les modèles. En effet, ces méthodes tirent leur importance du constat fait sur les propriétés de convergence des méthodes classiques de type Jacobi : plus la grille est *lâche*, plus la convergence des composantes spatiales de *basse fréquence* de l'erreur commise est importante, tandis que plus la grille est *fine* plus la convergence des composantes de *haute fréquence* est importante (Hackbusch [55], Briggs et al. [27]).

Les méthodes multi-grille permettent de concilier ces deux aspects a priori contradictoires pour maximiser le taux de convergence global. Les avantages de ces méthodes sont le taux de convergence très important et la vitesse de convergence non dégradée par le raffinement des grilles.

### 3.1 Principe de base

Les méthodes multi-grille se décomposent en deux parties essentielles : une partie de *lissage* dans laquelle un petit nombre d'itérations sur la grille *fine*, où l'on veut résoudre le problème, réduit les composantes spatiales de haute fréquence de l'erreur commise dans l'estimation de la solution sur cette grille, puis une correction sur grille *lâche* pour supprimer les composantes de basse fréquence.

La méthode itérative utilisée pour la première partie doit avoir des propriétés de lissage très efficaces, ce qui est le cas de la méthode de Gauss-Seidel bien plus que des méthodes de type Jacobi (Hackbusch [55], Briggs et al. [27]). C'est pourquoi on utilisera la méthode de Gauss-Seidel pour l'atome à plusieurs niveaux développée dans le chapitre précédent pour réaliser la partie de lissage de la méthode multi-grille.

On va commencer par expliquer la méthode multi-grille dans le cas de problèmes linéaires, ce qui n'est pas le cas du problème de l'atome à plusieurs niveaux à cause du couplage entre transfert radiatif et EES, mais cela permettra de comprendre la philosophie générale de cette méthode.

## 3.2 Le cas linéaire

On considère tout d'abord une discrétisation de la partie spatiale du problème, via un ensemble de grilles plus ou moins fines, dont la résolution spatiale est indiquée par l'indice de niveau  $l$ , avec comme convention que *plus  $l$  est grand plus la grille est fine*. On remplace la variation continue des grandeurs physiques par un ensemble de valeurs discrètes en  $N_l$  points de la grille notée  $G_l$ , et toutes les équations par leurs approximations discrètes.

Ainsi on va modéliser un système d'équations linéaires sur la grille  $G_l$  par

$$\mathcal{L}_l \mathbf{u}_l = \mathbf{f}_l, \quad (3.1)$$

où  $\mathbf{u}_l$  est la solution exacte du système. On va désigner par  $\mathbf{v}_l$  une approximation quelconque de cette solution exacte, par exemple une "solution" pas encore convergée dans le cas des méthodes itératives. Les symboles en gras, comme  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$ , représentent des vecteurs.

Il y a deux façons importantes de mesurer comment  $\mathbf{v}$  approxime  $\mathbf{u}$ . La première est l'*erreur* (ou *erreur algébrique*) qui est donnée simplement par

$$\mathbf{e}_l = \mathbf{u}_l - \mathbf{v}_l, \quad (3.2)$$

et peut être quantifiée en utilisant n'importe quelle norme (norme infinie ou norme euclidienne le plus souvent). La deuxième est le *résidu* donné par

$$\mathbf{r}_l = \mathbf{f}_l - \mathcal{L}_l \mathbf{v}_l, \quad (3.3)$$

qui est celui utilisé en pratique car il est impossible a priori de calculer l'erreur, de même que la solution exacte. En partant de l'Eq. (3.1) et en utilisant les définitions de  $\mathbf{e}$  et  $\mathbf{r}$ , on obtient une relation très importante entre l'erreur et le résidu :

$$\mathcal{L}_l \mathbf{e}_l = \mathbf{r}_l, \quad (3.4)$$

appelée *l'équation du résidu*. Elle montre que l'erreur satisfait le même système que la solution exacte  $\mathbf{u}$  lorsque on remplace le second membre  $\mathbf{f}$  par le résidu  $\mathbf{r}$ . Cette équation est la clé de voûte des méthodes multi-grille.

On peut montrer que les méthodes itératives classiques telles que Jacobi et Gauss-Seidel possèdent la propriété de lissage (Hackbusch [55], Briggs et al. [27]). Cette propriété rend ces méthodes très efficaces pour éliminer les composantes de haute fréquence ou oscillantes de l'erreur, mais laissent inchangées les composantes de basse fréquence ou lisses.

Pour améliorer ce dernier défaut, une première étape est d'avoir une bonne condition initiale, obtenue par quelques itérations sur une grille lâche. Ces itérations sont moins coûteuses car il y a moins de points spatiaux inconnus et les méthodes itératives ont alors un fort taux de convergence. Le rôle de la grille lâche ne s'arrête pas là, et c'est la

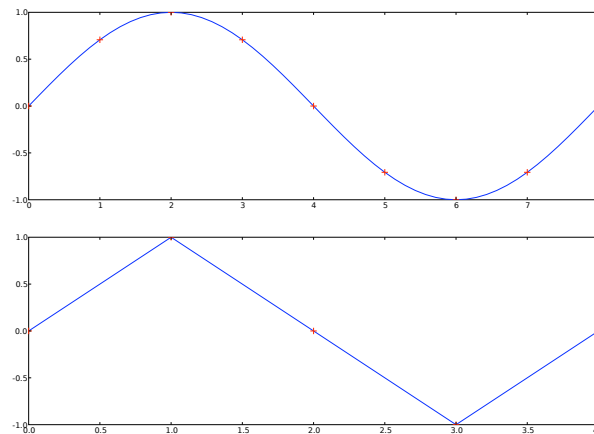


Fig. 3.1: Sur la figure du haut, on a représenté une erreur avec des oscillations plutôt lisses sur une grille de 8 points. Sur la figure du bas, on a interpolé cette erreur sur une grille plus lâche de 4 points, où elle apparaît plus oscillante.

deuxième étape. En effet, supposons que l'on ait lissé au maximum l'erreur et que toute nouvelle itération ne permette pas d'améliorer ce lissage. À l'aide de la Fig. (3.1), on s'aperçoit qu'en passant sur une grille plus lâche, les oscillations lisses de l'erreur deviennent plus "piquées", ce qui rend le processus itératif de lissage plus efficace. Rappelons que l'on peut itérer directement sur l'erreur via l'Eq. (3.4).

Ces deux étapes se traduisent par deux stratégies :

1. La première consiste à utiliser des grilles lâches pour obtenir de meilleures conditions initiales sur les grilles plus fines :
  - itérer  $\mathcal{L}u = f$  sur une grille très lâche  $G_1$  pour obtenir une condition initiale meilleure sur la grille plus fine suivante  $G_2$ .
  - 
  - itérer  $\mathcal{L}u = f$  sur  $G_{l-1}$  pour obtenir une condition initiale sur  $G_l$ .
  - itérer  $\mathcal{L}u = f$  sur  $G_l$  pour obtenir une approximation finale de la solution.
2. La seconde inclut l'utilisation de l'équation du résidu pour itérer sur l'erreur :
  - itérer  $\mathcal{L}u = f$  sur  $G_l$  pour obtenir une approximation  $v_l$ .
  - calculer le résidu  $r = f - \mathcal{L}v_l$  puis itérer  $\mathcal{L}e = r$  sur  $G_{l-1}$  pour obtenir une approximation de l'erreur  $e_{l-1}$ .
  - corriger l'approximation obtenue sur  $G_l$  avec l'erreur estimée obtenue sur  $G_{l-1}$  :  $v_l \leftarrow v_l + e_{l-1}$ .

Cette seconde stratégie est la base de ce que l'on appelle le *schéma correctif*. Ayant itéré sur la grille fine jusqu'à ce que la convergence se détériore, on itère l'équation du résidu sur une grille plus lâche pour obtenir une approximation de l'erreur. On retourne ensuite sur la grille fine pour y corriger la première approximation obtenue.

Toutes ces procédures supposent néanmoins des mécanismes permettant de transférer l'information d'une grille à l'autre. On va considérer uniquement le cas où le pas

spatial est divisé par deux lorsqu'on passe d'une grille lâche à une grille fine, ce qui est une pratique très répandue.

L'étape du schéma correctif, qui consiste à transférer l'estimation de l'erreur  $e_{l-1}$  de la grille lâche  $G_{l-1}$  à la grille fine  $G_l$ , est appelée *interpolation* ou *prolongation*; elle est couramment utilisée en analyse numérique. L'opérateur associé sera noté  $I_{l-1}^l$ , il prend un vecteur de grille lâche et fournit un vecteur de grille fine selon  $I_{l-1}^l \mathbf{v}_{l-1} = \mathbf{v}_l$ . Pour le transfert radiatif, on utilisera une interpolation cubique centrée comme le préconise Fabiani Bendicho et al. [44]. Cette interpolation s'écrit dans le cas 1D et en considérant une grille à pas spatial fixe :

$$\begin{cases} v_l^{2j-1} &= v_{l-1}^j \\ v_l^{2j} &= -\frac{1}{16} v_{l-1}^{j-1} + \frac{9}{16} v_{l-1}^j + \frac{9}{16} v_{l-1}^{j+1} - \frac{1}{16} v_{l-1}^{j+2}, \quad 2 \leq j \leq n-2, \end{cases} \quad (3.5)$$

où  $n$  est le nombre total de points de la grille lâche  $G_{l-1}$ . Les conditions aux limites sont obtenues via (voir Hackbusch [55]) :

$$\begin{cases} v_l^1 &= v_{l-1}^1 \\ v_l^2 &= \frac{3}{8} v_{l-1}^1 + \frac{3}{4} v_{l-1}^2 - \frac{1}{8} v_{l-1}^3 \\ v_l^{2n-3} &= v_{l-1}^{n-1} \\ v_l^{2n-2} &= \frac{3}{8} v_{l-1}^n + \frac{3}{4} v_{l-1}^{n-1} - \frac{1}{8} v_{l-1}^{n-2} \\ v_l^{2n-1} &= v_{l-1}^n \end{cases} \quad (3.6)$$

Le second transfert d'information se fait d'une grille fine à une grille lâche, ce que l'on nomme *restriction*. L'opérateur associé est noté  $I_l^{l-1}$  et vérifie  $I_l^{l-1} \mathbf{v}_l = \mathbf{v}_{l-1}$ . Dans le cas le plus simple, adopté par Fabiani Bendicho et al. [44], on choisit l'opérateur *adjoint* de l'interpolation linéaire qui s'écrit dans le cas 1D :

$$v_{l-1}^j = \frac{1}{4} (v_l^{2j-2} + 2 v_l^{2j-1} + v_l^{2j}), \quad 2 \leq j \leq n-1, \quad (3.7)$$

où  $n$  est le nombre total de points de la grille fine  $G_l$ . Les conditions aux limites sont alors simplement :

$$\begin{cases} v_{l-1}^1 &= v_l^1 \\ v_{l-1}^{2n-1} &= v_l^n \end{cases} \quad (3.8)$$

On dispose maintenant des outils pour transférer des vecteurs entre grilles fines et lâches et on peut donc préciser le schéma correctif vu plus haut et définir le *schéma correctif deux-grilles* (TGM, Two-Grid Method) :

$$\mathbf{v}_l \leftarrow \text{TGM}(\mathbf{v}_l, \mathbf{f}_l)$$

- pré-lissage : itérer  $\nu_1$  fois  $\mathcal{L}_l \mathbf{u}_l = \mathbf{f}_l$  sur  $G_l$  avec une condition initiale  $\mathbf{v}_l$  donnée.
- calculer le résidu  $\mathbf{r}_l = \mathbf{f}_l - \mathcal{L}_l \mathbf{v}_l$  sur la grille fine et le restreindre à la grille lâche via  $\mathbf{r}_{l-1} = I_l^{l-1} \mathbf{r}_l$ .
- résoudre  $\mathcal{L}_{l-1} \mathbf{e}_{l-1} = \mathbf{r}_{l-1}$  sur  $G_{l-1}$ .
- interpoler l'erreur  $\mathbf{e}_{l-1}$  sur la grille fine via  $\mathbf{e}_l = I_{l-1}^l \mathbf{e}_{l-1}$  et corriger l'approximation grille fine par  $\mathbf{v}_l \leftarrow \mathbf{v}_l + \mathbf{e}_l$ .
- post-lissage : itérer  $\nu_2$  fois  $\mathcal{L}_l \mathbf{u}_l = \mathbf{f}_l$  sur  $G_l$  avec la nouvelle condition initiale  $\mathbf{v}_l$ .

où les entiers  $\nu_1$  et  $\nu_2$  sont des paramètres qui contrôlent le nombre d'itérations avant et après le passage sur grille lâche. Ils sont en général fixés au départ et valent couramment 1, 2 ou 3.

Cette procédure soulève toutefois une question : comment résoudre  $\mathcal{L}_{l-1} \mathbf{e}_{l-1} = \mathbf{r}_{l-1}$  ? Il suffit en fait de penser de manière récursive, puisqu'on peut appliquer le schéma correctif deux-grilles à cette équation et ainsi déplacer l'étape de correction à la grille  $G_{l-2}$ . On peut répéter ce processus jusqu'à atteindre une grille sur laquelle on sait trouver une solution à l'équation du résidu, ce qui revient dans notre cas à savoir inverser le système linéaire à moindre coût ou bien lorsque l'on a atteint la grille la plus lâche possible.

Cette méthode récursive est un cycle en  $V$  décrit comme :

$$\mathbf{v}_l^e \leftarrow \text{V-cycle}(\mathbf{v}_l^e, \mathbf{r}_l)$$

1. pré-lissage : itérer  $\nu_1$  fois  $\mathcal{L}_l \mathbf{e}_l = \mathbf{r}_l$  sur  $G_l$  avec une condition initiale  $\mathbf{v}_l^e$  donnée,  $\mathbf{v}^e$  étant une approximation de  $\mathbf{e}$ .
2. Si  $G_l$  est la grille la plus lâche aller à l'étape 4.  
Sinon

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{l-1} &\leftarrow I_l^{l-1}(\mathbf{r}_l - \mathcal{L}_l \mathbf{v}_l^e), \\ \mathbf{v}_{l-1}^e &\leftarrow \mathbf{0}, \\ \mathbf{v}_{l-1}^e &\leftarrow \text{V-cycle}(\mathbf{v}_{l-1}^e, \mathbf{r}_{l-1}). \end{aligned}$$

3. corriger  $\mathbf{v}_l^e \leftarrow \mathbf{v}_l^e + I_{l-1}^l \mathbf{v}_{l-1}^e$ .
4. post-lissage : itérer  $\nu_2$  fois  $\mathcal{L}_l \mathbf{e}_l = \mathbf{r}_l$  sur  $G_l$  avec la nouvelle condition initiale  $\mathbf{v}_l^e$ .

Plus haut, on a évoqué deux idées conduisant au multi-grille. La première développée était le schéma correctif ; il reste à explorer l'idée d'itération emboîtée, qui utilise les grilles lâches pour obtenir de meilleures conditions initiales sur les grilles fines.

L'algorithme permettant d'inclure cette idée dans un cycle en  $V$  est le cycle en  $V$  multi-grille complet (FMG, Full Multigrid V-cycle) :

$$\mathbf{v}_l \leftarrow \text{FMG}(\mathbf{f}_l)$$

1. Si  $G_l$  est la grille la plus lâche, faire  $\mathbf{v}_l \leftarrow 0$  et aller à l'étape 3.  
Sinon

$$\mathbf{f}_{l-1} \leftarrow I_l^{l-1}(\mathbf{f}_l),$$

$$\mathbf{v}_{l-1} \leftarrow \text{FMG}(\mathbf{f}_{l-1}).$$

2. corriger  $\mathbf{v}_l \leftarrow I_{l-1}^l \mathbf{v}_{l-1}$ .

3.  $\mathbf{v}_l \leftarrow V_l(\mathbf{v}_l, \mathbf{f}_l)$   $\nu_0$  fois.

avec en pratique  $\nu_0 = 1$ .

Le processus multi-grille fait la synthèse de techniques bien connues et utilisées depuis longtemps (voir Briggs et al. [27] et les références dans cet ouvrage) mais qui, prises individuellement, présentent de sérieux inconvénients. Cet algorithme, qui élimine ces limitations en les faisant travailler ensemble, s'avère ainsi être très puissant et efficace. On va maintenant voir que les méthodes multi-grille sont aisément applicables et aussi utiles dans le cas de problèmes non-linéaires.

### 3.3 Le cas non-linéaire

On reprend toutes les mêmes hypothèses que dans le cas linéaire, concernant la discrétisation et les notations, mais on considère maintenant un système d'équations algébriques non-linéaires :

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}. \quad (3.9)$$

La notation  $\mathcal{L}(\mathbf{u})$ , au lieu de  $\mathcal{L}\mathbf{u}$ , indique que l'opérateur est non-linéaire.

On suppose à nouveau que  $\mathbf{v}$  est un vecteur approximant la solution exacte  $\mathbf{u}$ . L'erreur sera alors  $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$  et le résidu  $\mathbf{r} = \mathbf{f} - \mathcal{L}(\mathbf{v})$ . Si on soustrait l'Eq. (3.9) à la définition du résidu, on obtient :

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}) - \mathcal{L}(\mathbf{v}) = \mathbf{r}, \quad (3.10)$$

ce qui est quasiment l'équation du résidu vue à la section précédente, dans le cas linéaire. Mais comme l'opérateur  $\mathcal{L}$  est non-linéaire, on ne peut écrire  $\mathcal{L}(\mathbf{u}) - \mathcal{L}(\mathbf{v}) = \mathcal{L}(\mathbf{e})$ . On

doit donc utiliser l'Eq. (3.10) comme équation du résidu dans le cas non-linéaire, équation que l'on écrit sous la forme

$$\mathcal{L}(\mathbf{v} + \mathbf{e}) - \mathcal{L}(\mathbf{v}) = \mathbf{r} . \quad (3.11)$$

En se plaçant du point de vue "deux-grilles", on suppose que l'on a trouvé une approximation  $\mathbf{v}_l$  au problème sur grille fine  $\mathcal{L}_l(\mathbf{u}_l) = \mathbf{f}_l$ . Comme on l'a fait dans le cas linéaire, on va utiliser l'équation du résidu sur la grille lâche  $G_{l-1}$  pour approximer  $\mathbf{e}_l$ , l'erreur faite en considérant  $\mathbf{v}_l$ . L'équation du résidu apparaît ainsi comme

$$\mathcal{L}_{l-1}(\mathbf{v}_{l-1} + \mathbf{e}_{l-1}) - \mathcal{L}_{l-1}(\mathbf{v}_{l-1}) = \mathbf{r}_{l-1} , \quad (3.12)$$

où  $\mathcal{L}_{l-1}$  désigne l'opérateur,  $\mathbf{r}_{l-1}$  le résidu,  $\mathbf{v}_{l-1}$  l'approximation de  $\mathbf{v}_l$  et  $\mathbf{e}_{l-1}$  l'approximation de  $\mathbf{e}_l$ , sur la grille lâche  $G_{l-1}$ . Une fois  $\mathbf{e}_{l-1}$  calculé, l'approximation sur grille fine peut être mise à jour par  $\mathbf{v}_l \leftarrow \mathbf{v}_l + I_{l-1}^l \mathbf{e}_{l-1}$ .

En ce qui concerne le résidu  $\mathbf{r}_{l-1}$ , il est simplement la restriction du résidu sur grille fine :

$$\mathbf{r}_{l-1} = I_l^{l-1} \mathbf{r}_l = I_l^{l-1} (\mathbf{f}_l - \mathcal{L}_l(\mathbf{v}_l)) . \quad (3.13)$$

On fait de même pour l'approximation  $\mathbf{v}_{l-1}$  en utilisant le même opérateur de restriction que pour le calcul du résidu :  $\mathbf{v}_{l-1} = I_l^{l-1} \mathbf{v}_l$ . En faisant ces substitutions dans l'Eq. (3.12), l'équation du résidu devient

$$\mathcal{L}_{l-1}(\underbrace{I_l^{l-1} \mathbf{v}_l + \mathbf{e}_{l-1}}_{\mathbf{u}_{l-1}}) = \mathcal{L}_{l-1}(I_l^{l-1} \mathbf{v}_l) + I_l^{l-1} (\mathbf{f}_l - \mathcal{L}_l(\mathbf{v}_l)) , \quad (3.14)$$

où le membre de droite de ce système non-linéaire est connu. Le but est de déterminer, ou d'approximer, la solution notée  $\mathbf{u}_{l-1}$ .

L'approximation de l'erreur sur grille lâche,  $\mathbf{e}_{l-1} = \mathbf{u}_{l-1} - I_l^{l-1} \mathbf{v}_l$ , peut alors être interpolée sur la grille fine et utilisée pour corriger l'approximation sur grille fine  $\mathbf{v}_l$ . Cette étape de correction prend la forme

$$\mathbf{v}_l \leftarrow \mathbf{v}_l + I_{l-1}^l \mathbf{e}_{l-1} \quad \text{ou} \quad \mathbf{v}_l \leftarrow \mathbf{v}_l + I_{l-1}^l (\mathbf{u}_{l-1} - I_l^{l-1} \mathbf{v}_l) . \quad (3.15)$$

Le schéma décrit jusqu'ici est la version non-linéaire la plus couramment utilisée du multi-grille (Hackbush [55], Briggs et al. [27]), appelée *schéma d'approximation complète* (FAS, Full Approximation Scheme) en raison de la résolution du problème sur grille lâche pour l'approximation complète  $\mathbf{u}_{l-1}$  plutôt que pour l'erreur  $\mathbf{e}_l$ . Une version deux-grilles de ce schéma peut être décrit ainsi :



### Full Approximation Scheme (FAS)

- restreindre l'approximation courante et le résidu sur grille fine à la grille lâche :  $\mathbf{r}_{l-1} = I_l^{l-1}(\mathbf{f}_l - \mathcal{L}_l(\mathbf{v}_l))$  et  $\mathbf{v}_{l-1} = I_l^{l-1}\mathbf{v}_l$ .
- résoudre le problème sur grille lâche  $\mathcal{L}_{l-1}(\mathbf{u}_{l-1}) = \mathcal{L}_{l-1}(\mathbf{v}_{l-1}) + \mathbf{r}_{l-1}$ .
- calculer l'approximation de l'erreur sur grille lâche  $\mathbf{e}_{l-1} = \mathbf{u}_{l-1} - \mathbf{v}_{l-1}$ .
- interpoler l'approximation de l'erreur jusqu'à la grille fine et corriger l'approximation courante sur grille fine :  $\mathbf{v}_l \leftarrow \mathbf{v}_l + I_{l-1}^l \mathbf{e}_{l-1}$ .

Evidemment, dans le cas où l'opérateur  $\mathcal{L}$  est *linéaire*, on retrouve le schéma correctif deux-grilles TGM.

La généralisation à un algorithme multi-grille non-linéaire récursif se fait sans difficulté selon NMGM (Non-linear Multigrid Method, Brandt [26], Hackbusch [55]) :

### procedure NMGM( $\mathbf{u}_l, \mathbf{f}_l$ )

**Si**  $G_l$  est la grille la plus lâche, résoudre  $\mathcal{L}_l(\mathbf{u}_l) = \mathbf{f}_l$  (grâce à une méthode itérative de type Gauss-Seidel).

**Sinon**

- pré-lissage : itérer  $\nu_1$  fois  $\mathcal{L}_l(\mathbf{u}_l) = \mathbf{f}_l$  sur  $G_l$  avec une condition initiale  $\mathbf{v}_l$  donnée.
- $\mathbf{v}_{l-1} = I_l^{l-1}\mathbf{v}_l$ .
- $\mathbf{r}_{l-1} = I_l^{l-1}(\mathbf{f}_l - \mathcal{L}_l(\mathbf{v}_l))$ .
- $\mathbf{f}_{l-1} = \mathcal{L}_{l-1}(\mathbf{v}_{l-1}) + \mathbf{r}_{l-1}$ .
- condition initiale  $\mathbf{u}_{l-1} = \mathbf{v}_{l-1}$ .
- appel de la procedure NMGM( $\mathbf{u}_{l-1}, \mathbf{f}_{l-1}$ ).
- $\mathbf{v}_l \leftarrow \mathbf{v}_l + I_{l-1}^l(\mathbf{u}_{l-1} - \mathbf{v}_{l-1})$ .
- post-lissage : itérer  $\nu_2$  fois  $\mathcal{L}_l(\mathbf{u}_l) = \mathbf{f}_l$  sur  $G_l$  avec la nouvelle condition initiale  $\mathbf{v}_l$ .

Cet algorithme s'inclut immédiatement dans un schéma itératif emboîté :

**Pour**  $l = 1$   $G_l$  est la grille la plus lâche, résoudre  $\mathcal{L}_l(\mathbf{u}_l) = \mathbf{f}_l$  grâce à une méthode itérative de type Gauss-Seidel.

**Pour chaque grille**  $l = 2 \dots N$ , où  $N$  est la grille la plus fine, faire :

- $\mathbf{u}_l = I_{l-1}^l \mathbf{u}_{l-1}$  devient la condition initiale sur la grille  $G_l$ .
- appel à la procedure NMGM( $\mathbf{u}_l, \mathbf{f}_l$ ).

On dispose maintenant de tous les éléments nécessaires pour appliquer la méthode multi-grille emboîtée au problème hors-ETL complet (équations du transfert radiatif, EES et équilibre d'ionisation).

### 3.4 Mise en œuvre

On va ici développer la manière dont est construit l'algorithme qui permet de résoudre le transfert radiatif dans le cas de l'atome à plusieurs niveaux, via la méthode multi-grille emboîtée. Notons tout d'abord que le problème à résoudre est *non-linéaire*. En effet les EES permettant de connaître les populations atomiques dépendent du champ de rayonnement qui dépend lui-même des populations atomiques. Le système des équations de l'équilibre statistique données au § 1.2.1 peut se mettre sous la forme simple :

$$\mathcal{L}_l(\mathbf{n}_l) = \mathbf{f}_l, \quad (3.16)$$

où  $\mathcal{L}_l$  est une matrice diagonale par blocs. Elle est formée de  $N_l$  sous-matrices (une pour chaque point de la grille) de dimension  $NL \times NL$ , où  $NL$  est le nombre de niveaux atomiques. Le vecteur  $\mathbf{n}_l$  est de dimension  $NL \times N_l$ , comme le vecteur connu  $\mathbf{f}_l$ . Les coefficients de la matrice  $\mathcal{L}_l$  dépendent des taux de collision et de variables thermodynamiques tous connus, ainsi que des taux radiatifs qui sont à déterminer de manière auto-cohérente.

Le second membre  $\mathbf{f}_l$  est très simple. Comme on l'a déjà évoqué au § 1.2.1, les équations du système ne sont pas indépendantes et il faut remplacer une des lignes du système des EES par l'équation traduisant la conservation du nombre total de particules  $n_t$ , donc  $\mathbf{f}_l$  ne contient que des 0 sauf le dernier élément qui sera  $n_t$  (pour chaque point de la grille spatiale  $k$ ) :

$$\mathbf{f}_l^k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ n_t \end{pmatrix}.$$

Comme on l'a déjà vu, ce système peut être résolu avec les méthodes MALI ou Gauss-Seidel. Mais pour élaborer une méthode multi-grille puissante pour le transfert radiatif, il faut considérer la méthode de Gauss-Seidel/SOR multi-niveaux qui a une capacité de lissage bien supérieure à MALI.

Voici les différentes étapes de l'algorithme multi-grille emboîté pour le transfert radiatif, avec  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  les critères d'arrêt des itérations :

### Nested multigrid RT method

**Pour**  $l = 1$   $G_1$  est la grille la plus lâche, on calcule les populations via le schéma itératif GSM/SOR mis en œuvre dans les chapitres précédents. On itère tant que  $R_c > \epsilon_1$  : il est inutile de faire trop d'itérations puisque sur une grille très lâche, aucune précision n'est plus apportée à la solution à partir d'un certain moment.

**Pour chaque grille**  $l = 2, \dots, N$ , où  $N$  est la grille la plus fine, faire :

- initialisation des populations sur la grille  $G_l$  en prolongeant les populations obtenues sur la grille précédente  $G_{l-1}$  par interpolation cubique centrée  $\mathbf{n}_l = I_{l-1}^l \mathbf{n}_{l-1}$ .
- calcul des coefficients  $\chi$  et des fonctions sources  $S$  associées à ces populations pour chaque point de la grille  $G_l$  et pour chaque transition permise.
- tant que  $R_c > \epsilon_2$  appel à la procédure récursive NMGM( $\mathbf{n}_l, \mathbf{f}_l$ ) qui se décompose comme suit :

**Si**  $G_l$  est la grille la plus lâche, résoudre  $\mathcal{L}_l(\mathbf{n}_l) = \mathbf{f}_l$  avec le schéma itératif GSM/SOR jusqu'à réduire l'erreur initiale d'un ordre de grandeur.

**Sinon**

1. pré-lissage : à partir de la condition initiale  $\mathbf{n}_l^{ini} = \mathbf{n}_l$ ,  $\nu_1$  itérations de l'équation  $\mathcal{L}_l(\mathbf{n}_l) = \mathbf{f}_l$  pour obtenir  $\mathbf{n}_l^{old}$  avec le schéma itératif GSM/SOR.
2. calcul du champ de rayonnement  $\mathcal{L}_l^{old}$  associé à  $\mathbf{n}_l^{old}$  avec une méthode de calcul de la solution formelle.
3. calcul du résidu  $\mathbf{r}_l = \mathbf{f}_l - \mathcal{L}_l^{old} \mathbf{n}_l^{old}$ .
4. restriction sur la grille  $G_{l-1}$  du résidu :  $\mathbf{r}_{l-1} = I_{l-1}^{l-1} \mathbf{r}_l$ .
5. restriction sur la grille  $G_{l-1}$  des populations :  $\mathbf{n}_{l-1}^{ini} = I_{l-1}^{l-1} \mathbf{n}_l^{old}$ .
6. calcul du champ de rayonnement  $\mathcal{L}_{l-1}^{old}$  associé à  $\mathbf{n}_{l-1}^{ini}$  avec une méthode de calcul de la solution formelle.
7. calcul du second membre  $\mathbf{f}_{l-1} = \mathcal{L}_{l-1}^{old} \mathbf{n}_{l-1}^{ini} + \mathbf{r}_{l-1}$ .
8.  $\mathbf{n}_{l-1} = \mathbf{n}_{l-1}^{ini}$ .
9. appel à la procédure récursive NMGM( $\mathbf{n}_{l-1}, \mathbf{f}_{l-1}$ ) qui renvoie la nouvelle valeur des populations  $\mathbf{n}_{l-1}$ .
10. calcul de l'erreur sur les populations  $\mathbf{e}_{l-1} = \mathbf{n}_{l-1} - \mathbf{n}_{l-1}^{ini}$ .
11. prolongation sur la grille  $G_l$  de l'erreur :  $\mathbf{e}_l = I_{l-1}^l \mathbf{e}_{l-1}$ .
12. calcul des nouvelles populations sur la grille  $G_l$  :  $\mathbf{n}_l^{new} = \mathbf{n}_l^{old} + \mathbf{e}_l$ .
13. calcul des coefficients  $\chi$  et des fonctions sources  $S$  associées à ces populations pour chaque point de la grille  $G_l$  et pour chaque transition permise.
14. post-lissage : à partir de la condition initiale  $\mathbf{n}_l^{ini} = \mathbf{n}_l^{new}$ ,  $\nu_2$  itérations de l'équation  $\mathcal{L}_l(\mathbf{n}_l) = \mathbf{f}_l$  pour obtenir  $\mathbf{n}_l$  avec le schéma itératif GSM/SOR.

Pour le choix de  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$ , on renvoie le lecteur à l'article de Fabiani Bendicho et al. [44] qui détaille toute la procédure de calcul.

On peut noter dès à présent que cet algorithme *ne fait aucune supposition sur le nombre de dimensions du problème*. Pour le problème du transfert radiatif 2D qui nous concernera plus loin, je vais donner les expressions des opérateurs d'interpolation cubique centrée et de restriction (voir Hackbusch [55]) dans le cas général d'une grille à pas variable. Je considère uniquement le cas où le pas spatial est divisé par deux lorsqu'on passe d'une grille lâche à une grille fine. Posons  $y$  l'axe horizontal et  $z$  l'axe vertical de la grille 2D; les vecteurs  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{z}$  contiennent les positions géométriques des points de la grille 2D.

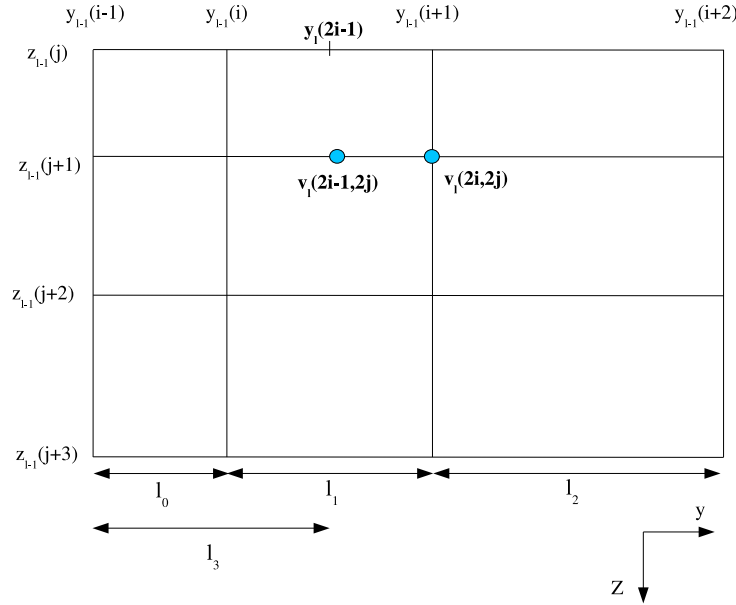


Fig. 3.2: Illustration de l'interpolation cubique centrée. La valeur  $v_l(2i-1, 2j)$  de grille fine est calculée à partir des valeurs de grille lâche aux points  $(i-1, j+1)$ ,  $(i, j+1)$ ,  $(i+1, j+1)$ ,  $(i+2, j+1)$  et des distances géométriques  $l_0$ ,  $l_1$ ,  $l_2$  et  $l_3$ ; la valeur  $v_l(2i, 2j)$  de grille fine est égale à la valeur  $v_{l-1}(i+1, j+1)$  de grille lâche.

**Interpolation cubique centrée.** On va créer le vecteur de grille fine  $\mathbf{v}$  ligne par ligne, il y a donc deux cas : soit la ligne contient déjà des points géométriques de la grille lâche, soit il faut créer entièrement la ligne. Dans le premier cas, on définit les distances géométriques suivantes, le long de l'axe des  $y$  (voir Fig. 3.2) :

$$\begin{cases} l_0 = y_{l-1}(i) - y_{l-1}(i-1) \\ l_1 = y_{l-1}(i+1) - y_{l-1}(i) \\ l_2 = y_{l-1}(i+2) - y_{l-1}(i+1) \\ l_3 = y_l(2i-1) - y_{l-1}(i-1), \end{cases} \quad (3.17)$$

on pose

$$\begin{cases} f_0 = v_{l-1}(i-1, j+1) \\ f_1 = v_{l-1}(i, j+1) \\ f_2 = v_{l-1}(i+1, j+1) \\ f_3 = v_{l-1}(i+2, j+1) \end{cases} \quad (3.18)$$

pour les éléments du vecteur de grille lâche qui vont servir à l'interpolation puis on calcule les coefficients d'interpolation

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{f_3}{l_2(l_1 + l_2)(l_0 + l_1 + l_2)} - \frac{f_2}{l_1 l_2(l_0 + l_1)} \\ \quad + \frac{f_1}{l_0 l_1(l_1 + l_2)} - \frac{f_0}{l_0(l_0 + l_1)(l_0 + l_1 + l_2)} \\ b = \frac{f_2}{l_1(l_0 + l_1)} - \frac{f_1}{l_0 l_1} + \frac{f_0}{l_0(l_0 + l_1)} - a(2l_0 + l_1) \\ c = \frac{f_1 - a.l_0^3 - b.l_0^2 - f_0}{l_0} \end{array} \right. \quad (3.19)$$

et l'on en déduit les éléments du vecteur de grille fine :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_l(2i - 1, 2j) = a.l_3^3 + b.l_3^2 + c.l_3 + f_0 \\ v_l(2i, 2j) = v_{l-1}(i + 1, j + 1) \end{array} \right. \quad (3.20)$$

Dans le second cas, on définit les distances géométriques suivantes, le long de l'axe des  $z$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} l_0 = z_{l-1}(j + 1) - z_{l-1}(j) \\ l_1 = z_{l-1}(j + 2) - z_{l-1}(j + 1) \\ l_2 = z_{l-1}(j + 3) - z_{l-1}(j + 2) \\ l_3 = z_l(2j + 1) - z_{l-1}(j), \end{array} \right. \quad (3.21)$$

on pose

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0 = v_l(i, 2j - 2) \\ f_1 = v_l(i, 2j) \\ f_2 = v_l(i, 2j + 2) \\ f_3 = v_l(i, 2j + 4) \end{array} \right. \quad (3.22)$$

pour les éléments du vecteur de grille fine qui vont servir à l'interpolation puis on calcule les coefficients d'interpolation

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{f_3}{l_2(l_1 + l_2)(l_0 + l_1 + l_2)} - \frac{f_2}{l_1 l_2(l_0 + l_1)} \\ \quad + \frac{f_1}{l_0 l_1(l_1 + l_2)} - \frac{f_0}{l_0(l_0 + l_1)(l_0 + l_1 + l_2)} \\ b = \frac{f_2}{l_1(l_0 + l_1)} - \frac{f_1}{l_0 l_1} + \frac{f_0}{l_0(l_0 + l_1)} - a(2l_0 + l_1) \\ c = \frac{f_1 - a.l_0^3 - b.l_0^2 - f_0}{l_0} \end{array} \right. \quad (3.23)$$

et l'on en déduit les éléments du vecteur de grille fine :

$$v_l(i, 2j+1) = a.l_3^3 + b.l_3^2 + c.l_3 + f_0 \quad (3.24)$$

**Restriction.** On va créer le vecteur de grille lâche  $\mathbf{v}$  ligne par ligne selon :

$$\begin{aligned} v_{l-1}(i, j) = & \frac{1}{16} [v_l(2i-3, 2j-3) + 2v_l(2i-2, 2j-3) + v_l(2i-1, 2j-3) \\ & + 2v_l(2i-3, 2j-2) + 4v_l(2i-2, 2j-2) + 2v_l(2i-1, 2j-2) \\ & + v_l(2i-3, 2j-1) + 2v_l(2i-2, 2j-1) + v_l(2i-1, 2j-1)] \end{aligned} \quad (3.25)$$

Dans le chapitre suivant, je vais décrire l'algorithme que j'ai développé pour créer un nouveau code radiatif 2D. Ce code a été développé en 2 temps : tout d'abord le développement de l'algorithme permettant d'appliquer le schéma itératif de GS/SOR en 2D, ensuite l'insertion de ce schéma dans la méthode multi-grille emboîtée que j'ai décrite ici.



# 4

## Un nouveau code radiatif 2D

---

Par la suite, on s'intéressera à une modélisation plus réaliste des structures isolées et illuminées, comme les protubérances qui baignent dans la couronne solaire (Paletou [104] [105]). L'étude des raies de résonance dans ces structures (Vial [136]) montre que la prise en compte du transfert radiatif en 2D améliore l'accord entre les profils émergents calculés et observés. De plus des effets de géométrie significatifs ont déjà été mis en évidence dans la formation de la raie spectrale  $H\alpha$  (Paletou [106]). La modélisation hors-ETL des raies spectrales observées dans les structures isolées, telle que les protubérances solaires, doit prendre en compte les effets latéraux du transfert radiatif, car l'illumination extérieure est importante, qu'elle soit photosphérique ou coronale : utiliser une géométrie 2D est donc plus réaliste. Cela nécessite la mise en place de nouveaux codes radiatifs 2D rapides, à la fois pour réduire les temps et les coûts de calcul et pour améliorer la prise en compte des phénomènes physiques.

Je vais décrire dans ce chapitre l'algorithme que j'ai développé pour créer un nouveau code radiatif 2D permettant de résoudre le problème du transfert de rayonnement dans une atmosphère à géométrie 2D cartésienne, statique, en supposant une redistribution complète en fréquence. J'ai tout d'abord développé l'algorithme permettant d'appliquer le schéma itératif de GS/SOR en 2D pour l'atome à 2 niveaux puis pour le multiniveaux. J'ai ensuite inséré ce schéma dans la méthode multi-grille emboîtée que j'ai présentée au chapitre précédent.

### 4.1 La méthode des caractéristiques courtes en 2D

La première étape consiste à repenser la méthode des caractéristiques courtes pour une grille 2D. On se limite dans toute la suite à une géométrie cartésienne 2D. Les deux axes privilégiés sont  $y$  et  $z$ , la dimension selon  $x$  est donc infinie.

En reprenant l'expression de l'intensité spécifique donnée par l'Eq. (2.17) appliquée sur la grille 2D de la Fig. (4.1), on doit utiliser les points  $u$  et  $d$  qui ne sont plus des points-grille comme en 1D. Par conséquent il faut déterminer les termes  $I_u$ ,  $S_u$  et  $S_d$  par interpolation



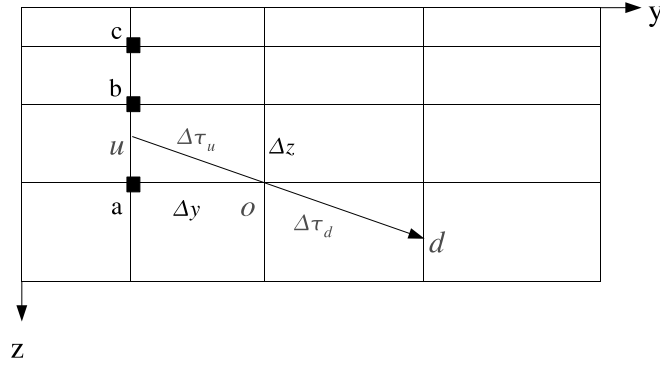


Fig. 4.1: Quantités utilisées pour la mise en œuvre de la méthode des caractéristiques courtes sur une grille 2D. On cherche à calculer l'intensité spécifique au point  $o$ .  $\Delta y$  et  $\Delta z$  sont les dimensions de la cellule contenant la caractéristique courte qui va de  $u$  à  $o$ .

à partir de points-grille. On va détailler la méthode pour calculer  $I_u$ , sachant que le calcul de  $S_u$  et  $S_d$  est similaire.

D'après Auer & Paletou [8], il faut commencer par déterminer sur quel axe,  $y$  ou  $z$ , les points  $u$  et  $d$  se trouvent. La caractéristique courte considérée peut en effet couper l'un ou l'autre des axes. Posons  $c_y$  (respectivement  $c_z$ ) le cosinus de l'angle entre le rayon lumineux et l'axe  $y$  (respectivement  $z$ ),  $\Delta y$  la longueur en  $y$  de la cellule contenant les points  $o$  et  $u$ , et  $\Delta z$  sa longueur en  $z$ . Si

$$\frac{\Delta y}{c_y} > \frac{\Delta z}{c_z}$$

le rayon coupe en premier l'axe  $y$  et  $\Delta\tau_u = \Delta z/c_z$ . Sinon le rayon coupe en premier l'axe  $z$  et  $\Delta\tau_u = \Delta y/c_y$ .

Pour déterminer l'intensité spécifique  $I_u$ , on peut utiliser trois points-grille  $a$ ,  $b$  and  $c$  comme indiqué sur la Fig. (4.1), via une interpolation parabolique :

$$I_u = \omega_a I_a + \omega_b I_b + \omega_c I_c \quad (4.1)$$

où, si l'axe coupé en premier est  $z$ , les poids d'interpolation sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_a = \frac{(z_b - z)(z_c - z)}{(z_b - z_a)(z_c - z_a)} \\ \omega_b = \frac{(z_a - z)(z_c - z)}{(z_a - z_b)(z_c - z_b)} \\ \omega_c = \frac{(z_a - z)(z_b - z)}{(z_a - z_c)(z_b - z_c)} \end{array} \right. \quad (4.2)$$

et des poids similaires sont calculés pour une interpolation en  $y$ , en utilisant les points-grille  $(i-1, j)$ ,  $(i-1, j-1)$  et  $(i-1, j-2)$ .

Les valeurs d'intensité spécifique aux points-grille  $a$ ,  $b$  and  $c$  doivent avoir été calculées

précédemment. Ceci est possible lorsqu'on balaie la grille 2D en s'éloignant des frontières  $y$  et  $z$ , sur lesquelles on aura prescrit des conditions aux limites a priori. Notons également que  $S_u$  and  $S_d$  sont calculés à partir de  $(S_a, S_b, S_c)$  en utilisant des expressions similaires.

Comme l'ont souligné Auer & Paletou [8], il faut faire attention en utilisant une interpolation parabolique. En effet, même si les valeurs aux points-grille sont monotones, les valeurs interpolées, de degré supérieur à 1, peuvent ne pas l'être. Par exemple, prenons  $I_a = I_b = 0$  et  $I_c = 1$ ,  $I_y$  est alors négatif pour tout  $y_a < y < y_b$ , ce qui est physiquement impossible. L'interpolation parabolique, en tant que telle, peut donc générer des termes erronés. Pour éviter ce problème qui est incorrect, il faut utiliser une interpolation monotone, c'est-à-dire poser  $I_u$  (et  $I_d$ ) égal au minimum ou au maximum de  $I_a$  et  $I_b$  si l'interpolant parabolique se trouve hors de l'intervalle  $[\min(I_a, I_b), \max(I_a, I_b)]$ .

Comme on l'a vu précédemment en 1D, l'utilisation du schéma itératif de GSM/SOR fournit des taux de convergence bien plus élevés que les méthodes de type MALI, pour des temps de calcul similaires. Ces méthodes sont donc à privilégier et il paraît évident de les étendre au cas 2D afin d'accroître la précision des modèles étudiés. En effet plus la méthode numérique utilisée sera rapide et efficace, plus le modèle étudié pourra être complexe et réaliste. Je vais donc maintenant décrire en détail l'algorithme que j'ai développé pour résoudre l'ETR avec un schéma itératif de type GSM/SOR en 2D.

## 4.2 Méthode de GSM/SOR en 2D

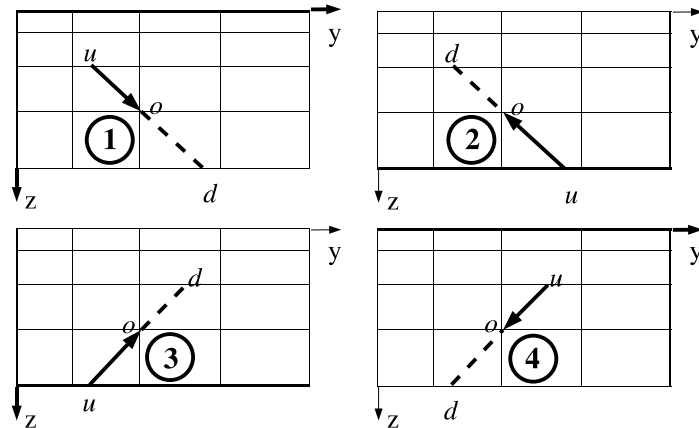


Fig. 4.2: La grille 2D est parcourue 4 fois : un premier passage dans la direction  $\searrow$  définie sur le panneau 1, un deuxième dans la direction  $\swarrow$  définie sur le panneau 2, un troisième dans la direction  $\nearrow$  définie sur le panneau 3 et un quatrième dans la direction  $\nwarrow$  définie sur le panneau 4. Le balayage doit être fait en s'éloignant des bords pour que les intensités utilisées dans l'Eq. (4.1) soient toujours connues.

L'algorithme permettant d'utiliser la méthode GS/SOR en 2D a fait l'objet d'une publication insérée ci-après (Léger et al. [79]). Je vais en reprendre les étapes importantes

dans le cas de l'atome à deux niveaux puis j'expliquerai comment étendre la méthode pour l'atome à plusieurs niveaux.

**Le sens de parcours.** On parcourt la grille 2D *quatre fois* comme décrit sur la Fig. (4.2), disons en premier selon les  $y$  et les  $z$  croissants, le long des directions  $\Omega_1$  -notons que  $z = 0$  est pris comme surface de l'atmosphère-, en second selon les  $y$  et les  $z$  décroissants le long des directions  $\Omega_2$ , en troisième selon les  $y$  croissants et les  $z$  décroissants le long des directions  $\Omega_3$ , et enfin selon les  $y$  décroissants et les  $z$  croissants le long des directions  $\Omega_4$ . L'intensité spécifique  $I_{\nu\Omega}$  est alors calculée pas à pas durant chacun des trois premiers passages passage, intégrée partiellement suivant les angles, quadrant après quadrant, et intégrée suivant les fréquences. Par analogie avec le schéma itératif GS/SOR en 1D, *durant le quatrième passage*, on peut désormais calculer l'intensité moyenne en chaque point puis mettre à jour immédiatement la fonction source selon la correction donnée par l'Eq. (2.6), *avant* de passer au point suivant.

**Le calcul à un point intérieur  $(i,j)$  quelconque.** On se référera à la Fig. (4) de l'article : l'algorithme est décrit en détails pages 70 et 71.

Retenons qu'il est *très important* de tenir compte des points mis à jour, marqués "new" sur la Fig. (4) de l'article, dans le calcul de l'intensité spécifique le long de la caractéristique courte. Ces mises à jour n'interviennent plus directement au niveau du terme de fonction source comme en 1D mais *au niveau des interpolants qui permettent de calculer ce terme de fonction source*, puisque les points  $u$  et  $d$  ne sont plus, en général, des points de la grille 2D.

Ainsi, on doit corriger l'intensité spécifique calculée lors *des trois premiers passages* pour être cohérent avec les mises à jour de fonctions source, comme indiqué par l'Eq. (18) de l'article pour le terme correspondant au troisième passage, par les Eqs. (19) et (20) de l'article pour les termes correspondant réciproquement au premier et deuxième passages.

On obtient aisément les termes correctifs d'intensité moyenne par intégration sur les fréquences et sur les angles caractérisant chaque passage, comme indiqué sur la Fig. 4.2. Ces termes correctifs permettent ensuite de calculer l'intensité moyenne totale au point courant. Enfin, on met à jour la fonction source locale simplement avec l'Eq. (2.6).

De manière analogue à la correction faite par l'Eq. (2.23) dans le cas de l'atome à deux niveaux en 1D, il est important de prendre en compte les modifications engendrées par la mise à jour des fonctions source, au point courant  $(i,j)$ , avant d'avancer au point suivant  $(i,j+1)$ . On termine donc les mises à jour au point  $(i,j)$  lors du quatrième passage par le calcul des termes correctifs  $\Delta I_{(i,j)}^{\swarrow}$ ,  $\Delta I_{(i,j)}^{\searrow}$  et  $\Delta I_{(i,j)}^{\nwarrow}$  via l'Eq. (25) page 71.

**Mise en place de SOR.** Pour mettre en place un schéma itératif SOR 2D, il suffit, à chaque point  $(i,j)$ , de mettre à jour la fonction source via l'Eq. (26) de l'article.

**Algorithme de calcul.** Comme dans le cas 1D, j'insiste ici sur l'ordre correct des différentes boucles de la plus extérieure à la plus intérieure :

1. les directions  $\Omega_i$  comme indiqué sur la Fig. 4.2,
2. les cosinus directeurs dans chaque quadrant,
3. les fréquences.

Il faut également stocker en mémoire les coefficients  $\Psi_u$  et  $\Psi_d$  calculés lors des trois premiers passages et qui serviront pour les calculs des termes correctifs d'intensité moyenne.

**Mise en place de GSM/SOR.** Pour mettre en œuvre le schéma itératif GS/SOR pour des atomes à plusieurs niveaux en 2D, on procède rigoureusement de la même façon qu'en 1D (§ 2.2.2, page 30). Les principales différences avec le cas de l'atome à deux niveaux sont qu'on ne travaille plus sur les fonctions source mais directement sur les populations des niveaux atomiques de l'atome considéré. Il faut correctement propager les effets de la mise à jour locale des populations : elle entraîne *pour chaque transition autorisée* des modifications dans les coefficients d'absorption et dans les fonctions source de raie. Il faut tenir compte de ces modifications, lors du quatrième passage, dans le recalcul des intensités spécifiques, évaluées lors des trois premiers passages.

**Mise en place du multi-grille.** Comme je l'ai déjà souligné, l'algorithme du multi-grille emboîté, présenté au chapitre précédent (page 52), ne fait aucune supposition sur le nombre de dimensions du problème. Il suffit donc d'utiliser les opérateurs de restriction et de prolongation en 2D, ainsi que le schéma itératif GSM/SOR en 2D que je viens de décrire. Je vais maintenant montrer, grâce aux tests effectués, tout l'intérêt d'utiliser le nouveau code radiatif 2D ainsi obtenu, par rapport à la méthode MALI, en terme de vitesse de convergence pour une même précision.

## 4.3 Validation et résultats

### 4.3.1 Validation par rapport à une solution analytique

Il n'existe pas de solution analytique au problème de transfert radiatif en 2D. Nonobstant, il est possible de comparer une solution numérique 2D à une solution 1D pour laquelle des méthodes numériques et analytiques robustes et précises existent. Nous avons ainsi utilisé le code ARTY pour calculer les solutions analytiques de référence (Chevallier & Rutily [32]).

Le test réalisé est décrit dans l'article Léger et al. [79] inséré à la fin de ce chapitre, pages 71 et 73. On se place dans le cas de l'atome à deux niveaux. On se met dans un "cas gris" donc on ne prend en compte qu'une seule fréquence. On considère une source ponctuelle, située au centre d'une couche isolée 2D homogène et non éclairée de l'extérieur. Cette source émet isotropiquement dans l'espace, ce qui correspond en fait à une ligne infinie de sources selon l'axe des  $x$ , perpendiculairement au plan  $(y,z)$  dans lequel repose notre couche 2D. On calcule les trois premiers moments d'Eddington de

l'intensité spécifique  $J$ ,  $H$  et  $K$  à la surface de la couche isolée en  $z = 0$ . On intègre ces moments spatialement *le long de la surface de la couche isolée* pour les comparer à la solution 1D analytique.

Le résultat important à retenir de ce test est montré sur la Fig. (5) de l'article : les erreurs relatives acceptables, disons inférieures à 5%, sont obtenues pour des grilles *très raffinées* spatialement ce qui est difficilement atteignable avec un schéma itératif de type Jacobi comme ALI. Cela justifie pleinement l'utilisation de méthodes à fort taux de convergence du type Gauss-Seidel/SOR et Multigrille.

### 4.3.2 Résultats

On considère une couche isolée 2D statique et homogène, isotherme et isobare, illuminée par en-dessous sur la surface inférieure et les côtés. L'hypothèse d'atmosphère statique et isotherme adoptée permet d'utiliser des profils symétriques de type gaussien constant avec la profondeur optique, échantillonnés par huit points en fréquence. On s'est placé dans le cas de la CRD et on a utilisé le "set A" de Carlson [30] avec  $n_\mu = 3$  points par octant pour décrire la dépendance angulaire du champ de rayonnement (voir Tab. 4.2). Ces quadratures ne sont pas 2D, car Carlson considère des directions dans l'espace à 3 dimensions.

J'ai choisi une extension *géométrique* verticale de la couche isolée  $z_{max} = 30\,000$  km et une extension horizontale  $y_{max}$  pouvant prendre les valeurs suivantes : 100 000, 30 000, 10 000, 5 000 et 1 000 km, pour 163 points selon chaque axe. La discrétisation spatiale de la grille est faite de manière logarithmique depuis les frontières jusqu'au centre, ainsi cette représentation graphique compresse la région centrale et étend *considérablement* les régions proches des frontières. Ceci permet de mieux prendre en compte les conditions aux limites extérieures. J'ai fixé la température à  $T = 5\,000$  K et la pression gazeuse à  $p_g = 1 \text{ dyn cm}^{-2}$ .

On initialise les populations avec les valeurs à l'ETL, en considérant que la population de l'état fondamental est donnée par

$$n_1^* = \frac{4\pi\chi_{u1}}{hcB_{1u}} \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}, \quad (4.3)$$

où  $T$  est la température de l'atmosphère,  $B_{1u}$  est le coefficient d'Einstein pour l'absorption, pour la première transition permise entre les niveaux 1 et  $u$ .  $\chi_{u1}$  est le coefficient d'absorption centre raie pour cette même transition pris égal à 1, ce qui revient rendre équivalentes les grilles spatiale et en épaisseur optique.

On peut alors déterminer simplement les populations des niveaux excités par la statistique de Boltzmann :

$$n_i^* = n_1^* \frac{g_i}{g_1} \exp\left(-\frac{h\nu_{1i}}{k_B T}\right), \quad (4.4)$$

élément	$u$	$l$	$A_{ul} \text{ (s}^{-1}\text{)}$	$C_{ul} \text{ (s}^{-1}\text{)}$	$\nu_{ul} \text{ (Hz)}$
H	2	1	$4.68 \times 10^8$	$10^5$	$2.47 \times 10^{15}$
H	3	1	$5.54 \times 10^7$	$10^5$	$2.93 \times 10^{15}$
H	3	2	$4.39 \times 10^7$	$10^5$	–
Ca	2	1	interdite	$8.2 \times 10^3$	$4.10 \times 10^{14}$
Ca	3	1	interdite	$8.2 \times 10^3$	$4.12 \times 10^{14}$
Ca	4	1	$1.4 \times 10^8$	$5.1 \times 10^4$	$7.56 \times 10^{14}$
Ca	5	1	$1.4 \times 10^8$	$5.1 \times 10^4$	$7.63 \times 10^{14}$
Ca	3	2	interdite	$10^7$	–
Ca	4	2	$7.8 \times 10^6$	$1.6 \times 10^5$	–
Ca	5	2	$8.1 \times 10^5$	$1.6 \times 10^4$	–
Ca	4	3	interdite	$10^3$	–
Ca	5	3	$7.2 \times 10^6$	$1.4 \times 10^5$	–
Ca	5	4	interdite	$4.8 \times 10^6$	–

Tab. 4.1: Paramètres d'entrée pour les modèles d'atome à plusieurs niveaux H I et Ca II d'Avrett [10]. Les poids statistiques sont  $g_1 = 2$ ,  $g_2 = 8$ , et  $g_3 = 18$  pour H I,  $g_1 = 2$ ,  $g_2 = 4$ ,  $g_3 = 6$ ,  $g_4 = 2$ , et  $g_5 = 4$  pour Ca II.

où  $g_i$  est le poids statistique du niveau  $i$  considéré.

Les modèles d'atomes à plusieurs niveaux ont été proposés par Cuny [34] puis référencés par Avrett [10] au début de l'ère numérique. Ils constituent encore un "banc de test numérique" très utile pour les comparaisons de résultats. Les données atomiques correspondantes sont rappelées dans la Tab. (4.1).

Les taux de convergence des méthodes itératives SOR et MG sont montrés sur la Fig. (6) de l'article Léger et al. [79] page 72 pour  $y_{max} = 5000$  km, où l'on a tracé le changement relatif maximum sur les populations  $R_c$ . Les temps de calcul pour les quatre principaux processus itératifs 2D multi-niveaux MALI, GSM, SOR et MG sont donnés sur le Tab. (1) de l'article pour différents niveaux de raffinement de grille. On peut noter que le processus Multigrille (MG) présente des taux de convergence bien supérieurs et des temps de calcul bien inférieurs à ses "concurrents", mais surtout il fournit un nombre d'itérations *quasiment constant* avec le raffinement de la grille et des temps de calcul qui augmentent beaucoup moins vite avec le raffinement de la grille (voir Fig. 4.3). Ceci est un avantage considérable quand on sait l'importance du raffinement de grille dans l'obtention d'une solution précise (Chevallier et al. [33]). De plus, l'erreur de convergence  $C_e$  définie par :

$$C_e = \max \left( \frac{|n(itr) - n(\infty)|}{n(\infty)} \right), \quad (4.5)$$

où  $n(\infty)$  est la population exacte sur la grille considérée, est plus petite que  $R_c$  pour MG. Rappelons que pour les méthodes MALI ou SOR, une petite valeur de  $R_c$ , qui est le paramètre de contrôle de convergence du processus itératif le plus direct et le plus utilisé, n'implique pas forcément une petite valeur de  $C_e$ . Ceci signifie que la convergence n'est pas forcément atteinte (Fabiani Bendicho et al. [44]).



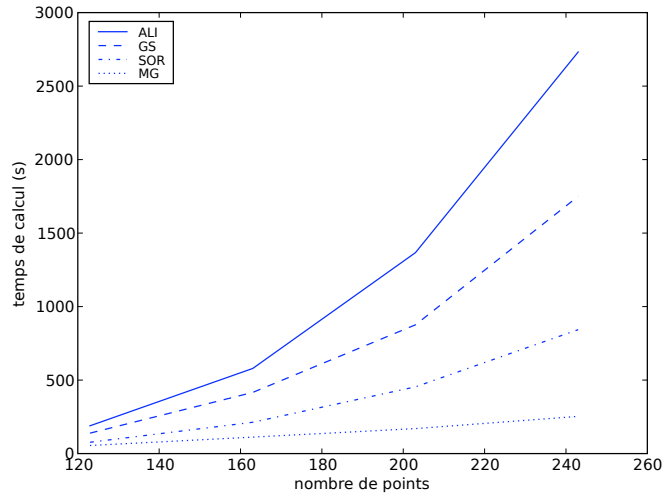


Fig. 4.3: Temps de calcul en fonction du nombre de points spatiaux de la grille 2D utilisée, pour les quatre schémas itératifs MALI2D, GSM2D, SOR2D et MG2D.

Sur la Fig. (7) de l'article, on a tracé la fonction source  $S(H\alpha)$  normalisée à l'illumination extérieure en fonction de la profondeur optique le long de la verticale pour  $y = y_{max}/2$  (mi-couche). Les variations 1D (trait plein) sont obtenues pour le modèle 2D qui a l'extension horizontale la plus importante (100 000 km). Pour des extensions plus faibles, des effets latéraux de transfert radiatif apparaissent et affectent progressivement l'excitation à l'intérieur de la couche isolée. Notons que pour la plus faible extension (1 000 km), on retrouve la valeur quasi-constante  $S/B = 0.5$  cohérente avec des conditions optiquement minces le long de l'axe vertical de la couche 2D. Comme déjà montré par Paletou [106] dans le cas de  $H\alpha$ , on retrouve également à quelles conditions les effets de transfert radiatif 2D sur les variations verticales de la fonction source peuvent être significatifs. De manière plus générale, on peut s'attendre à des effets similaires pour toutes les raies spectrales d'épaisseur optique modérée.

Enfin les Fig. (8) de l'article sont les cartes 2D des populations des deux niveaux excités de l'hydrogène normalisés à leurs valeurs à l'ETL, pour une extension horizontale de 5 000 km. Elles montrent les écarts à l'ETL, ainsi que les effets de géométrie à l'intérieur du couche isolée. Pour détailler l'information contenue dans ces figures, et puisqu'on ne trouve pas de telles données dans la littérature alors que les besoins en transfert radiatif multidimensionnel sont de plus en plus évidents, on fournit à titre de référence la Tab. (2) page 74 de la distribution des populations à l'intérieur de la couche.

Les tests réalisés ici, avec un modèle simplifié d'atome d'hydrogène, ont permis de valider la méthode MG en 2D que j'ai développée, et de montrer tout l'intérêt d'une part de faire du transfert en 2D puisque les effets géométriques sur la distribution des populations à l'intérieur du couche isolée sont loin d'être négligeables, et d'autre part d'utiliser ce type de méthode (combinée à un schéma itératif de type GS/SOR) pour ses performances en terme de convergence, temps de calcul et précision. On peut dé-

---

sormais s'intéresser à la modélisation de cas plus réalistes, en prenant en compte des modèles atomiques plus complexes, pour des géométries multidimensionnelles. Je vais ainsi présenter dans le chapitre 6 le traitement d'un modèle atomique d'hélium, incluant la structure fine atomique, avec du transfert radiatif 2D hors-ETL dans une structure isolée de type protubérance solaire.



$n_\mu$	$csz$	$csy$	$wtdir$
1	0.57735027	0.57735027	0.25
	-0.57735027	0.57735027	0.25
3	0.33333333	0.88191710	0.08333333
	0.33333333	0.33333333	0.08333333
	0.88191710	0.33333333	0.08333333
	-0.33333333	0.88191710	0.08333333
	-0.33333333	0.33333333	0.08333333
	-0.88191710	0.33333333	0.08333333
6	0.25819889	0.93094934	0.04583333
	0.25819889	0.68313005	0.03750000
	0.25819889	0.25819889	0.04583333
	0.68313005	0.68313005	0.03750000
	0.68313005	0.25819889	0.03750000
	0.93094934	0.25819889	0.04583333
	-0.25819889	0.93094934	0.04583333
	-0.25819889	0.68313005	0.03750000
	-0.25819889	0.25819889	0.04583333
	-0.68313005	0.68313005	0.03750000
	-0.68313005	0.25819889	0.03750000
	-0.93094934	0.25819889	0.04583333
10	0.21821789	0.95118973	0.03174535
	0.21821789	0.78679579	0.02284588
	0.21821789	0.95118973	0.03174535
	0.21821789	0.57735027	0.02284588
	0.21821789	0.21821789	0.03174535
	0.57735027	0.78679579	0.02284588
	0.57735027	0.57735027	0.01768867
	0.57735027	0.21821789	0.02284588
	0.78679579	0.57735027	0.02284588
	0.78679579	0.21821789	0.02284588
	0.95118973	0.21821789	0.03174535
	-0.21821789	0.95118973	0.03174535
	-0.21821789	0.78679579	0.02284588
	-0.21821789	0.57735027	0.02284588
	-0.21821789	0.21821789	0.03174535
	-0.57735027	0.78679579	0.02284588
	-0.57735027	0.57735027	0.01768867
	-0.57735027	0.21821789	0.02284588
	-0.78679579	0.57735027	0.02284588
	-0.78679579	0.21821789	0.02284588
	-0.95118973	0.21821789	0.03174535

Tab. 4.2: Quadrature angulaire du "set A" de Carlson [30] :  $n_\mu$  est le nombre de directions par octant,  $csz$  et  $csy$  sont les cosinus directeurs respectivement selon l'axe des  $z$  et selon l'axe des  $y$ ,  $wtdir$  sont les poids associés à ces cosinus directeurs.

A&A 470, 1–9 (2007)  
 DOI: 10.1051/0004-6361:20066730  
 © ESO 2007

**Astronomy  
&  
Astrophysics**

## Fast 2D non-LTE radiative modelling of prominences

### Numerical methods and benchmark results

L. Léger<sup>1</sup>, L. Chevallier<sup>2,3</sup>, and F. Paletou<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Université de Toulouse, Observatoire Midi-Pyrénées, Laboratoire d'Astrophysique de Toulouse & Tarbes (CNRS/UMR 5572), 14 avenue Edouard Belin, 31400 Toulouse, France

e-mail: [lleger; fpaletou]@ast.obs-mip.fr

<sup>2</sup> University of Kentucky, Department of Physics & Astronomy, Lexington, KY 40506-0055, USA

e-mail: lchevallier@pa.uky.edu

<sup>3</sup> Observatoire de Paris-Meudon, LUTH, 5 place Jules Janssen, 92195 Meudon, France

Received 10 November 2006 / Accepted 28 March 2007

#### ABSTRACT

**Context.** New high-resolution spectropolarimetric observations of solar prominences require improved radiative modelling capabilities in order to take into account both multi-dimensional – at least 2D – geometry and complex atomic models.

**Aims.** This makes necessary the use of very fast numerical schemes for the resolution of 2D non-LTE radiative transfer problems considering freestanding and illuminated slabs.

**Methods.** The implementation of Gauss-Seidel and successive over-relaxation iterative schemes in 2D, together with a multi-grid algorithm, is thoroughly described in the frame of the short characteristics method for the computation of the formal solution of the radiative transfer equation in cartesian geometry.

**Results.** We propose a new test for multidimensional radiative transfer codes and we also provide original benchmark results for simple 2D multilevel atom cases which should be helpful for the further development of such radiative transfer codes, in general.

**Key words.** radiative transfer – methods: numerical – Sun: prominences

### 1. Introduction

Efficient iterative schemes have been introduced in the field of two-dimensional (2D) non-LTE numerical radiative transfer during the last, say, fifteen years. These developments most often rely on the combination of the short characteristics (SC) method for the so-called formal solution of the radiative transfer equation (in cartesian geometry see e.g., Kunasz & Auer 1988; Auer & Paletou 1994 and in various other geometries; van Noort et al. 2002) and efficient iterative schemes such as Gauss-Seidel and successive over-relaxation (GS/SOR) iterative processes (Trujillo Bueno & Fabiani Bendicho 1995; Paletou & Léger 2007) together with multi-grid (MG) methods (Auer et al. 1994; Fabiani Bendicho et al. 1997).

Hereafter, we are interested in a more realistic modelling of isolated and illuminated structure, such as prominences hanging in the solar corona (see e.g., Paletou 1995, 1996). Our future work will place emphasis on the synthesis of the H and He spectra. Indeed, the most recent modelling efforts concerning the synthesis of the H and He spectrum in prominences was performed using either mono-dimensional (1D) slabs (Labrosse & Gouttebroze 2001, 2004), or using 2D cartesian slabs in magnetohydrostatic equilibrium and the Multilevel Accelerated Lambda Iteration (MALI) technique for the solution of the non-LTE transfer problem (Heinzel & Anzer 2001, 2005). Concerning the spectrum of H, Gouttebroze (2006) also presented promising new results using 2D *cylindrical* models of coronal loops.

Our primary aim is thus to improve diagnostics based, in particular, on He I lines by treating a detailed He-atomic model

including the *atomic fine structure* together with 2D non-LTE radiative transfer. We are motivated here by new observations of solar prominences (see e.g., Paletou et al. 2001; Merenda et al. 2006), which also triggered some revisions of inverting tools (López Ariste & Casini 2002). And up to now, the later diagnostic tools are limited by the assumption that the relevant (observed) He spectral lines are optically *thin*; it is, however, easy to check from high spectral resolution observations that a spectral line like D<sub>3</sub> of He I in the visible, for instance, is not always optically thin, even in quiescent prominences (Landi Degl'Innocenti 1982; López Ariste & Casini 2002). Furthermore, the expected optical thicknesses of 1 to 10 say, in such structures let us forecast the presence of significant geometrical effects on the mechanism of the formation of this spectral line, like the ones already put in evidence on H $\alpha$  by Paletou (1997).

The combination of 2D geometry with a very detailed atomic model for He obviously requires a more efficient radiative transfer code as compared to the one developed from the MALI method by Paletou (1995). And clearly enough, the planned improvement of the radiative modelling, including multidimensional geometry, together with multi-level, realistic atomic models have to rely on those new and fast radiative transfer methods which are based on GS/SOR with multigrid numerical schemes.

GS/SOR methods, best implemented within a short characteristics formal solver, have been described in every detail by Trujillo Bueno & Fabiani Bendicho (1995), but *only* in the frame of the two-level atom case and in 1D geometry. In another article, Fabiani Bendicho et al. (1997) nicely described the implementation of non-linear multi-grid techniques, using an

efficient iterative method such as a GS/SOR scheme. However, they just did *not* describe the implementation of, 1D or multi-dimensional, multilevel GS/SOR schemes using the SC method. Besides, Paletou & Léger (2007) finally made *explicit* the implementation of GS/SOR iterative schemes in the multi-level atom case, restricted though to a 1D plane-parallel geometry.

The present article aims therefore at “filling the gap” by providing all the elements required for a successful implementation of a GS/SOR iterative scheme in a 2D cartesian geometry. In order to do so, we adopt the line of detailing the method in the frame of the 2-level atom given that our detailed description of the multilevel strategy published elsewhere (Paletou & Léger 2007) does not need to be commented any further for the jump from 1D to 2D. Therefore, we also provide hereafter various benchmark results for the 2D-multilevel atom case, still unpublished to date, using simple atomic models taken from Avrett (1968; see also Paletou & Léger 2007). Moreover, an *original* comparison between 2D numerical results and independent *analytical* solutions is made.

We shall recall in Sect. 2 the basic principles of ALI and GS/SOR iterative schemes in the frame of a two-level atom model and in 1D geometry. Then in Sect. 3 we shall describe, in detail, how the GS/SOR numerical method can be implemented for the case of 2D slabs in cartesian geometry, therefore upgrading the 2D short characteristic method initially published by Auer & Paletou (1994). A new test for numerical radiation transfer codes is briefly presented in Sect. 4. Then we shall finally present, in Sect. 5, benchmark results for simplified multilevel atomic models in 2D geometry and some illustrative examples clearly demonstrating in which conditions geometrical effects should be seriously considered.

## 2. Gauss-Seidel and SOR iterative schemes basics

In the *two-level atom case*, the non-LTE line source function, assuming *complete* redistribution in frequency, is usually written as

$$S(\tau) = (1 - \varepsilon)\bar{J}(\tau) + S^*(\tau), \quad (1)$$

where  $\tau$  is the optical depth,  $S^*$  is the thermal source function, and  $\varepsilon$  is the collisional destruction probability; unless explicitly mentioned,  $S^* = \varepsilon B$ , where  $B$  is the Planck function.  $\bar{J}$  is the usual mean intensity defined as

$$\bar{J} = \oint \frac{d\Omega}{4\pi} \int_0^\infty \phi_\nu I_{\nu\Omega} d\nu, \quad (2)$$

where the optical depth dependence has been omitted for the sake of simplicity; as usual,  $I_{\nu\Omega}$  is the specific intensity and  $\phi_\nu$  is the line absorption profile. Usually again, the mean intensity is written as the formal solution of the radiative transfer equation i.e.,

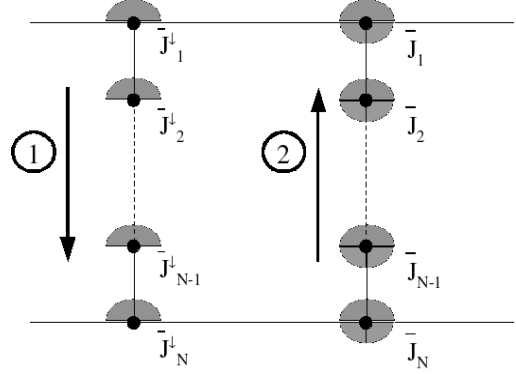
$$\bar{J} = \Lambda[S]. \quad (3)$$

Following the Jacobi-type iterative scheme introduced in numerical transfer by Olson et al. (1986), we shall consider a splitting operator  $\Lambda^*$  equal to the exact diagonal of the true operator  $\Lambda$ . Now introducing the perturbations

$$\begin{cases} \Lambda &= \Lambda^* + (\Lambda - \Lambda^*) \\ S^{(\text{new})} &= S^{(\text{old})} + \Delta S \end{cases} \quad (4)$$

in Eq. (1), we are led to an iterative scheme such that

$$S^{(\text{new})} = [1 - (1 - \varepsilon)\Lambda^*]^{-1} \{ (1 - \varepsilon)(\Lambda - \Lambda^*)S^{(\text{old})} + \varepsilon B \}. \quad (5)$$



**Fig. 1.** Schematic view of the short characteristics method for the computation of  $\bar{J}$  in a 1D grid of  $N$  points in the case of a ALI iterative scheme. During the first (downward here) pass the angular integration as in Eq. (2) is made over half an hemisphere; it is completed during the 2nd (upward) pass, allowing for the source function update according to Eq. (1).

Running the later scheme to convergence is better known in numerical radiative transfer as the “ALI method”. As schematized in Fig. 1, using the *short characteristics* method in 1D geometry (Olson & Kunasz 1987; Kunasz & Auer 1988), the formal solution is obtained by sweeping the grid say, first in directions  $-\Omega$  ( $\mu < 0$ ) i.e., from the surface down to the bottom of the atmosphere, and then in the opposite, upward directions  $+\Omega$  ( $\mu > 0$ ) moving from the bottom of the atmosphere up to its surface. The specific intensity  $I_{\nu\Omega}$  is then advanced step by step during each pass, partially integrated over angles and frequencies during the downward pass, while during the second (upward) pass, completion of the angular integration allows for the full determination of the mean intensity  $\bar{J}_k$  at each depth  $\tau_k$  of the 1D grid. Finally, we update the source function

$$S_k^{(\text{new})} = S_k^{(\text{old})} + \Delta S_k, \quad (6)$$

on the basis of increments such that

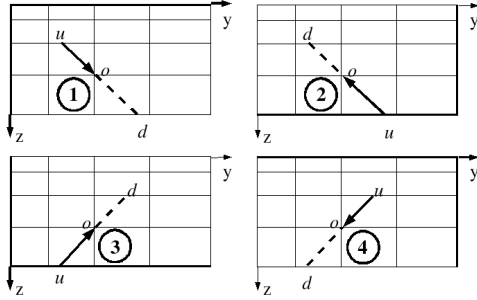
$$\Delta S_k = \frac{(1 - \varepsilon)\bar{J}_k^{(\text{old})} + \varepsilon B_k - S_k^{(\text{old})}}{1 - (1 - \varepsilon)\Lambda_{kk}}, \quad (7)$$

where  $\Lambda_{kk}$  is a *scalar* equal to the diagonal element of the full operator  $\Lambda$  at such a depth in the atmosphere and where superscripts (old) denote quantities *already known* from the previous iterative stage.

For a Gauss-Seidel iterative scheme, the sweeping of the atmosphere is identical, *but* as soon as the mean intensity  $\bar{J}_k$  is fully computed at depth-point  $k$  in the atmosphere during the upward pass, the *local* source function is updated immediately i.e., before completion of the 2nd pass, using increments which have now turned into

$$\Delta S_k^{(\text{GS})} = \frac{(1 - \varepsilon)\bar{J}_k^{(\text{old and new})} + \varepsilon B_k - S_k^{(\text{old})}}{1 - (1 - \varepsilon)\Lambda_{kk}}, \quad (8)$$

where the quantity  $\bar{J}_k^{(\text{old and new})}$  means that at the spatial point  $k$  the mean intensity has to be calculated via a formal solution of the transfer equation using the “new” source function values  $S_j^{(\text{new})}$  already obtained at points  $j = \text{ND}, \dots, (k + 1)$  and the “old” source function values  $S_j^{(\text{old})}$  at points  $j = k, (k - 1), \dots, 1$ .



**Fig. 2.** The 2D grid is swept four times: first pass in directions  $\searrow$  defined in panel 1, second pass in directions  $\swarrow$  defined in panel 2, third pass in directions  $\nearrow$  defined in panel 3 and fourth pass in directions  $\nwarrow$  defined in panel 4. Sweeping must be done away from the boundaries so that upwind intensities – see Eq. (11) – are always known.

Finally, as a next step SOR iterations can simply be implemented using

$$\Delta S_k^{(\text{SOR})} = \omega \Delta S_k^{(\text{GS})}, \quad (9)$$

where  $\omega$  is an *overrelaxation* parameter such that  $1 < \omega < 2$ . For two-level atom models in 1D, this method was originally proposed by Trujillo Bueno & Fabiani Bendicho (1995).

### 3. The 2D-cartesian geometry case

Hereafter, we shall describe *in detail* how the GS/SOR numerical method can be implemented for the case of 2D *freestanding slabs* modeled in cartesian geometry.

#### 3.1. SC in 2D: an overview

We shall initially follow and therefore *upgrade* the formal solver of reference proposed originally by Kunasz & Auer (1988) and modified by Auer & Paletou (1994).

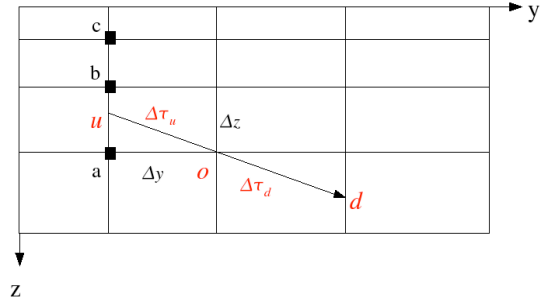
Using SC in 2D geometry, the formal solution is obtained by sweeping the grid four times, as schematized in Fig. 2, say first increasing  $y$  and  $z$  i.e., along directions  $\Omega_1$  (note that  $z = 0$  is the surface of the atmosphere), second decreasing  $y$  and  $z$  along directions  $\Omega_2$ , third increasing  $y$  and decreasing  $z$  along directions  $\Omega_3$ , and finally decreasing  $y$  and increasing  $z$  along directions  $\Omega_4$ . The specific intensity  $I_{\nu}$  is therefore advanced step by step during each pass, partially integrated over angles, quadrant after quadrant, and over frequencies during the first three passes while, during the fourth pass, the mean intensity  $\bar{J}$  can be fully computed, therefore completing the numerical evaluation of the formal solution

$$\bar{J}_{(i,j)} = \Lambda_{(i,j)}[S]. \quad (10)$$

Except at the boundary surfaces where the incident radiation is known a priori, along each direction the specific intensity at the inner grid points is advanced depth after depth. As displayed in Fig. 3, the short characteristic starts at grid point  $o$  ( $i, j$ ) and extends in the “upwind” and “downwind” directions until it hits one of the cell boundaries either at point  $u$  or at point  $d$  that is, *not* grid points in general. The specific intensity is therefore computed, according to Kunasz & Auer (1988), as

$$I_o = I_u e^{-\Delta\tau_u} + \Psi_u S_u + \Psi_o S_o + \Psi_d S_d, \quad (11)$$

where the first part of the right-hand side of this expression corresponds to the part transmitted from the “upwind” point  $u$  down



**Fig. 3.** Example of a short characteristic across a 2D cartesian grid at depth point  $o$  ( $i, j$ ) for a ray propagating along directions  $\searrow$  defined in panel 1 of Fig. 2: three points  $a$ ,  $b$  and  $c$  are used for monotonic parabolic interpolation in  $z$ , in order to evaluate quantities at point  $u$  following Auer & Paletou (1994).

to the current point  $o$ , and the last three terms result from the analytic integration of

$$\bar{I} = \int_0^{\Delta\tau_u} S(\tau) e^{-\tau} d\tau \quad (12)$$

along the short characteristic going from  $u$  to  $o$ ; expressions for the  $\Psi$ 's can be found in Paletou & Léger (2007).

As shown in Fig. 3, in 2D geometry,  $I_u$ ,  $S_u$ , and  $S_d$  are not grid points, and they must be evaluated by interpolation on the basis of a set of grid points. In order to do so, one has to first determine on which axis,  $y$  or  $z$ , the upwind and downwind points shall lie. We introduce  $c_y$  (respectively  $c_z$ ) the cosine between the direction into which the photon is moving and the  $y$ -axis (respectively the  $z$ -axis),  $\Delta y$  the  $y$  length of the cell containing both  $u$  and  $o$  grid points, and  $\Delta z$  its length in  $z$ . If

$$\frac{\Delta y}{c_y} < \frac{\Delta z}{c_z}$$

the ray hits the  $y$ -axis and  $\Delta\tau_u = \Delta z/c_z$ .

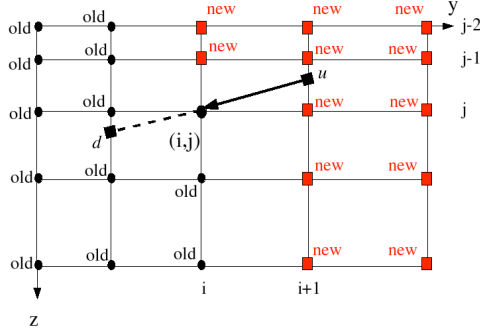
Following Auer & Paletou (1994),  $I_u$  and  $S_u$  are determined by interpolation along the upwind grid-line passing through points  $a$  and  $b$ . To perform a parabolic interpolation, we shall therefore use three grid points  $a$ ,  $b$ , and  $c$  as displayed in Fig. 3, where “quantities” have already been updated; along  $z$ -lines, interpolation weights are given by

$$\begin{cases} \omega_a = \frac{(z_b - z)(z_c - z)}{(z_b - z_a)(z_c - z_a)} \\ \omega_b = \frac{(z_a - z)(z_c - z)}{(z_a - z_b)(z_c - z_b)} \\ \omega_c = \frac{(z_a - z)(z_b - z)}{(z_a - z_c)(z_b - z_c)} \end{cases} \quad (13)$$

and similar weights should be used for interpolation in  $y$ , using grid points  $(i-1, j)$ ,  $(i-1, j-1)$  and  $(i-1, j-2)$  though. Then, we are able to calculate the upwind specific intensity as

$$I_u = \omega_a I_a + \omega_b I_b + \omega_c I_c \quad (14)$$

where specific intensity values have already been computed at grid points  $a$ ,  $b$ , and  $c$ . This is guaranteed by sweeping the grid away from one of the upwind boundaries. Note also that  $S_u$  and  $S_d$  are also evaluated from  $(S_a, S_b, S_c)$  using similar expressions.



**Fig. 4.** Let  $i$  be the index along the  $y$ -axis and  $j$  along the  $z$ -axis; we consider the specific intensity evaluation at any inner grid point  $(i, j)$  during the fourth pass in the 2D grid, corresponding to the directions  $\Omega_4$  defined in Fig. 2. At this stage, all “new” grid points have already been swept, so that source functions at these points have been updated too.

For the sake of accuracy and in order to avoid the generation of spurious upwind intensities by high-order interpolation, one must use a monotonic interpolation i.e., set  $I_u$  (and  $I_d$ ) equal to the minimum or maximum of  $I_a$  and  $I_b$  if the parabolic interpolant lies outside the interval  $[\min(I_a, I_b), \max(I_a, I_b)]$ , as proposed by Auer & Paletou (1994).

### 3.2. Implementation of GS/SOR in 2D

Assume that one has *already* swept the grid *three times* as described in Fig. 2. By analogy with the GS/SOR numerical strategy in 1D geometry, we now update the source function at each grid point during the fourth pass of the SC-2D scheme according to the correction given in Eq. (8) and *before* passing to the next depth point. It is a quite straightforward task at the boundary surfaces since the incident radiation field is known a priori from the (given) external conditions of illumination.

We shall hereafter describe what has to be done at the inner grid points. Figure 4 describes the situation once arriving at  $(i, j)$  after the 2D grid was swept thrice. Using superscripts defined in Fig. 2, the current specific intensity comes from

$$I_{(i,j)}^{\swarrow} = I_u^{\swarrow} e^{-\Delta\tau_u^{\swarrow}} + \Psi_u^{\swarrow} S_u^{\swarrow(\text{new})} + \Psi_o^{\swarrow} S_o^{\swarrow(\text{old})} + \Psi_d^{\swarrow} S_d^{\swarrow(\text{old})}, \quad (15)$$

where one must understand quantities with superscripts (new) such as resulting from interpolations along upwind grid lines, using source functions that were obtained during the preceding steps. Indeed, using an expression similar to the one in Eq. (14) for an interpolation along the  $z$ -axis, we would have

$$S_u^{\swarrow(\text{new})} = \omega_{a,(i,j)}^{\swarrow} S_{(i+1,j)}^{\swarrow(\text{new})} + \omega_{b,(i,j)}^{\swarrow} S_{(i+1,j-1)}^{\swarrow(\text{new})} + \omega_{c,(i,j)}^{\swarrow} S_{(i+1,j-2)}^{\swarrow(\text{new})}. \quad (16)$$

Before integrating over all frequencies and over the angles corresponding to the  $\Omega_4$  directions in order to obtain the partial mean intensity

$$\bar{J}^{\swarrow} = \int_{\Omega_4} \frac{d\Omega}{4\pi} \int_{\nu} \phi_{\nu} I_{\nu} d\nu, \quad (17)$$

we have to correct the specific intensity calculated during the first three passes for consistency with the source function

updates. More specifically, the term  $I_{(i,j)}^{\swarrow}$  was calculated during the third pass as<sup>1</sup>

$$I_{(i,j)}^{\swarrow} = I_u^{\swarrow} e^{-\Delta\tau_u^{\swarrow}} + \Psi_u^{\swarrow} S_u^{\swarrow(\text{old})} + \Psi_o^{\swarrow} S_o^{\swarrow(\text{old})} + \Psi_d^{\swarrow} S_d^{\swarrow(\text{OLD})} \quad (18)$$

using  $S_d^{\swarrow(\text{OLD})}$  instead of the *new* value  $S_d^{\swarrow(\text{new})}$  obtained from the interpolation using the updated points  $(i+1, j)$ ,  $(i+1, j-1)$ , and  $(i+1, j-2)$  as shown in Fig. 4. Since we have the identity  $S_d^{\swarrow} = S_u^{\swarrow}$  a correcting term

$$\Delta \bar{J}_{(i,j)}^{\swarrow} = \int_{\Omega_3} \frac{d\Omega}{4\pi} \int_{\nu} \phi_{\nu} [S_{u,v}^{\swarrow(\text{new})} - S_{d,v}^{\swarrow(\text{old})}] \Psi_{d,v}^{\swarrow} d\nu \quad (19)$$

must therefore be added to the total mean intensity by integrating the specific intensity correction over frequencies and over all angles  $\Omega_3$  (Fig. 2). This step is equivalent to the computation of the  $\Delta J_k^{\text{in}}$  correction mentioned by Trujillo Bueno & Fabiani Bendicho (1995) in their Eq. (39).

The two other terms,  $I_{(i,j)}^{\searrow}$  and  $I_{(i,j)}^{\nwarrow}$ , calculated during the first and the second passes are also still inconsistent with the last source function updates because they were calculated as

$$I_{(i,j)}^{\searrow} = I_u^{\searrow(\text{OLD})} e^{-\Delta\tau_u^{\searrow}} + \Psi_u^{\searrow} S_u^{\searrow(\text{OLD})} + \Psi_o^{\searrow} S_o^{\searrow(\text{old})} + \Psi_d^{\searrow} S_d^{\searrow(\text{OLD})}, \quad (20)$$

and

$$I_{(i,j)}^{\nwarrow} = I_u^{\nwarrow(\text{OLD})} e^{-\Delta\tau_u^{\nwarrow}} + \Psi_u^{\nwarrow} S_u^{\nwarrow(\text{OLD})} + \Psi_o^{\nwarrow} S_o^{\nwarrow(\text{old})} + \Psi_d^{\nwarrow} S_d^{\nwarrow(\text{OLD})}, \quad (21)$$

where we have the following identities  $S_u^{\searrow(\text{OLD})} = S_d^{\searrow(\text{OLD})}$  and  $S_d^{\nwarrow(\text{OLD})} = S_u^{\nwarrow(\text{OLD})}$ .

These (OLD) source functions can now be calculated using updated values. For example, the *new* value  $S_u^{\nwarrow(\text{new})} = S_d^{\nwarrow(\text{new})}$  is obtained from an equation similar to Eq. (14) with an interpolation along  $y$ -axis<sup>2</sup> using  $S_{(i,j-1)}^{\nwarrow(\text{new})}$ . Using Fig. 4, one can see that  $(i, j-1)$  is a “new” grid point whereas  $(i-1, j-1)$  and  $(i-2, j-1)$  are “old” grid points i.e.,

$$S_u^{\nwarrow(\text{new})} = \omega_{a,(i,j)}^{\nwarrow} S_{(i,j-1)}^{\nwarrow(\text{new})} + \omega_{b,(i,j)}^{\nwarrow} S_{(i-1,j-1)}^{\nwarrow(\text{old})} + \omega_{c,(i,j)}^{\nwarrow} S_{(i-2,j-1)}^{\nwarrow(\text{old})}. \quad (22)$$

Similarly, the *new* value  $S_d^{\nwarrow(\text{new})} = S_u^{\nwarrow(\text{new})}$  is obtained using an interpolation along  $y$ -axis, for instance, involving  $S_{(i+1,j+1)}^{\nwarrow(\text{new})}$  and  $S_{(i+2,j+1)}^{\nwarrow(\text{new})}$  – with this time, using Fig. 4, grid points at  $(i+1, j+1)$  and  $(i+2, j+1)$  are “new” whereas  $(i, j+1)$  is an “old” grid point i.e.,

$$S_d^{\nwarrow(\text{new})} = \omega_{a,(i,j)}^{\nwarrow} S_{(i,j+1)}^{\nwarrow(\text{old})} + \omega_{b,(i,j)}^{\nwarrow} S_{(i+1,j+1)}^{\nwarrow(\text{new})} + \omega_{c,(i,j)}^{\nwarrow} S_{(i+2,j+1)}^{\nwarrow(\text{new})}. \quad (23)$$

By analogy, old specific intensities,  $I_u^{\nwarrow(\text{OLD})}$  and  $I_u^{\nwarrow(\text{OLD})}$ , must be updated to obtain *new* values calculated with interpolations using “new” grid points.

We then have to calculate two other corrections  $\Delta J_{(i,j)}^{\nwarrow}$  and  $\Delta J_{(i,j)}^{\nwarrow}$  by integrating these corrected specific intensities over

<sup>1</sup> We use the superscript (OLD) to emphasize terms which need to be replaced by new values according to updated points in Fig. 4 whereas (old) terms remain unchanged.

<sup>2</sup> For an interpolation along  $z$ -axis, there are no “new” grid points to consider.



frequencies and over directions  $\Omega_1$  and  $\Omega_2$ , following an equation similar to Eq. (19). Finally we add three correcting terms to compute the *correct* total mean intensity at the current grid point  $(i, j)$ :

$$\begin{aligned} \bar{J}_{(i,j)} = & \bar{J}_{(i,j)}^{\rightarrow} + \bar{J}_{(i,j)}^{\leftarrow} + \bar{J}_{(i,j)}^{\nearrow} + \bar{J}_{(i,j)}^{\nwarrow} \\ & + \Delta \bar{J}_{(i,j)}^{\rightarrow} + \Delta \bar{J}_{(i,j)}^{\leftarrow} + \Delta \bar{J}_{(i,j)}^{\nearrow}. \end{aligned} \quad (24)$$

Then it is straightforward to update the local source function  $S_{i,j}^{(\text{new})}$  via Eq. (8).

However, before advancing to the next depth point  $(i, j + 1)$ , it is important to add the following corrections to the specific intensities of the first three passes, due to the source function update which has just been made at the current depth point:

$$\begin{cases} \Delta I_{(i,j)}^{\leftarrow} = \Psi_o^{\leftarrow} [S_{(i,j)}^{(\text{new})} - S_{(i,j)}^{(\text{old})}] \\ \Delta I_{(i,j)}^{\rightarrow} = \Psi_o^{\rightarrow} [S_{(i,j)}^{(\text{new})} - S_{(i,j)}^{(\text{old})}] \\ \Delta I_{(i,j)}^{\nearrow} = \Psi_o^{\nearrow} [S_{(i,j)}^{(\text{new})} - S_{(i,j)}^{(\text{old})}]. \end{cases} \quad (25)$$

This last stage is analogous to the correction described by Trujillo Bueno & Fabiani Bendicho (1995) in their Eq. (40).

Finally, a two-dimensional SOR iterative scheme is built when, at each depth-point  $(i, j)$ , the source function is updated according to

$$\Delta S_{(i,j)}^{(\text{SOR})} = \omega \Delta S_{(i,j)}^{(\text{GS})}, \quad (26)$$

where  $\omega$  is computed exactly in the same way as in the 1D case.

### 3.3. Additional notes on the whole numerical scheme

As in the 1D case, implementing a GS/SOR solver requires properly ordering the various loops; starting from outer to inner loop one should find: (1) the directions  $\Omega_i$  as shown in Fig. 2, (2) the direction cosines in each quadrant  $\Omega_i$  and, finally (3) the frequencies. The corrections described in Eqs. (18), (20), and (21) require some bookkeeping of variables such as all the  $\Psi_u$ 's and the  $\Psi_d$ 's computed during the three first passes (for the further computation of the mean intensity).

Details about the implementation of GS/SOR for *multilevel* atom models were given by Paletou & Léger (2007). The main difference with the two-level atom case is the propagation of the effects of the local population update: it generates *for each allowed transition* changes in the absorption coefficients at line center *and* in the line source functions.

Furthermore, we have also embedded the above-described 2D-GS/SOR scheme into a nested *multigrid* radiative transfer method following the precise description given by Fabiani Bendicho et al. (1997). We use three grids with a grid-doubling strategy. On the *coarsest* grid (i.e., level  $l = 1$ ), we iterate to convergence i.e., until  $R_c$ , the relative error on the level-populations from one iteration to another is “small” using the 2D-GS/SOR scheme. For each grid  $l = 2, 3$  where grid level  $l = 3$  is the finest one, we interpolate populations on grid level  $l$  using those obtained onto grid level  $(l - 1)$  and calculate the corresponding absorption coefficients and source functions. We iterate onto grid level  $l$  using the *standard multigrid method* from grid level  $l$  down to grid level  $l = 1$  only until the following stopping criterion is satisfied

$$R_c(\text{iter}, l) \frac{\lambda}{1 - \lambda} < \frac{1}{8} R_c(\text{iter} = 1, l) \quad (27)$$

where  $\lambda \simeq R_c(\text{iter}, l)/R_c(\text{iter} - 1, l)$ , as proposed by Auer et al. (1994).

We restate here the main steps of one standard multigrid iteration: make one pre-smoothing iteration onto grid level  $l$  using a pure GS iterative scheme, then a restriction down to grid level  $l = 1$  to compute the coarse-grid equation; solve the coarse-grid equation onto grid level  $l = 1$  using the 2D-SOR scheme; make a prolongation up to grid level  $l$  to obtain a new estimate of the populations, then one post-smoothing iteration onto grid level  $l$  again using a pure GS iterative scheme (it is important to note that one must make one pre- or post-smoothing iteration on each grid level using a pure GS iterative scheme). We used a cubic-centered interpolation for the prolongation and the adjoint of a nine-point prolongation for the restriction (see e.g., Hackbusch 1985).

### 4. Validation vs. an analytical solution

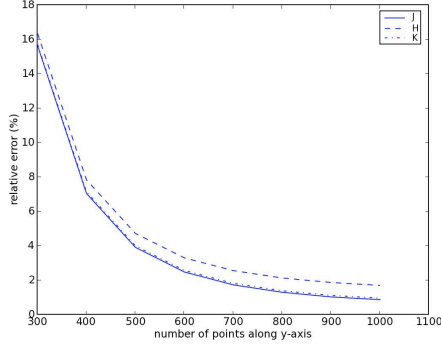
There is *no* analytical solution for 2D non-LTE radiative transfer. However, it is possible to compare 2D numerical solutions to 1D solutions for which accurate and robust numerical and analytical methods exist. In order for this comparison to be accurate, the slab has to be sufficiently extended in the  $y$  direction i.e. “effectively” infinite.

We have used the ARTY code for the computation of reference, analytical solutions (Chevallier & Rutly 2005; see also the Appendix) obtained using the method of the finite Laplace transform. This code can indeed solve standard 1D problems with an intrinsic accuracy better than  $10^{-10}$ ; it has already been useful testing the ALI method with a SC formal solver in 1D for the case of a non-illuminated, homogeneous, and isotropic plane-parallel slab with internal, homogeneous sources (Chevallier et al. 2003).

A stringent test for our 2D code was to consider a point-source located at the center of a non-externally illuminated and homogeneous slab. The central source emits isotropically in space, which in fact corresponds to a line, infinite along  $x$ , of sources. This idealized model captures most of the difficulties encountered when using numerical methods to solve the radiative transfer equation: the scattering is not neglected – it can also be dominant –, and the punctual source will lead to large gradients which are difficult to handle when dealing with discretization of the slab.

Then we computed the properties of the radiation field emerging at the top surface of the slab ( $z = 0$ ) at one frequency, as described by the usual first three moments  $J$ ,  $H$ ,  $K$  of the specific intensity; more precisely, the latter were integrated in space, *along the top surface of the slab*, in order to be compared to the 1D analytical solutions.

To carry out this test, we chose the difficult case of a slab of optical thickness  $\tau^* = 100$  in both directions, where scattering dominates the absorption adopting the value  $\varepsilon = 0.01$ . This medium is therefore effectively thick because the thermalization depth  $\ell \approx 1/\sqrt{3\varepsilon}$  is much smaller than the optical thickness in such a case. We used Carlson’s “Set A” (1963) with 10 points per octant to describe the angular dependence of the radiation field and only one frequency-point. The Dirac thermal source term was modeled by a sharp, normalised 2D-Gaussian function having half-width at half-maximum 0.16 in  $\tau$ . The grid is logarithmically refined near the center of the slab in order to accurately describe the shape of the 2D-Gaussian: the closest points to the center are at a distance  $10^{-4}$  along the axes, in order to accurately describe the Gaussian shape whose numerical integral over the space has to be the closest as possible to unity.



**Fig. 5.** Relative errors between spatial averages of the angular moments  $J$ ,  $H$  and  $K$  given by the 2D-SOR 2-level iterative process and their analytical values for  $\epsilon = 0.01$  vs. the number of spatial points of a square 2D grid of extension  $\tau^* = 100$  in each direction.

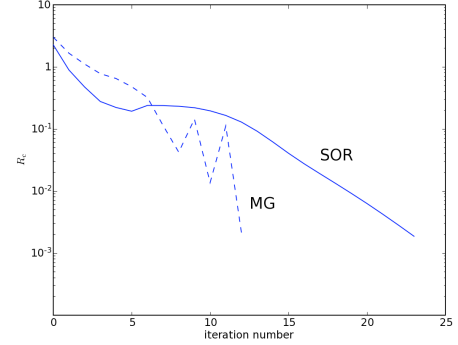
The two-level 2D-SOR iterative process was iterated until convergence of  $J$ ,  $H$ , and  $K$  i.e., when the second digit of their relative error did not show any more variation from one iteration to the next. For such a case, 500 iterations are sufficient. In Fig. 5, we demonstrate how these errors behave with the refinement of the spatial quadratures; the absolute values of the reference solutions, as well as the source functions and values of the specific intensity in the directions corresponding to the angular quadrature chosen here are given in the Appendix.

The important result to point out here concerning this new test is that (i) acceptable relative errors, say better than 5%, are obtained only for very refined grids which (ii) can hardly be handled using a simple Jacobi-like iterative scheme such as ALI. This again justifies the adoption of very high rate of convergence methods such as GS/SOR and MG. Finally, we are conducting more comprehensive tests of this nature the results of which will be published elsewhere.

## 5. Illustrative examples and benchmarks

We modeled a 2D freestanding slab irradiated from below, on its sides, and bottom by a Planck function. The slab is homogeneous and static with a vertical *geometrical* extension  $z_{\max} = 30\,000$  km; its horizontal extension  $y_{\max}$  could take the respective values: 100 000, 30 000, 10 000, 5000 and 1000 km. Depth points are logarithmically spaced away from the boundary surfaces and the graphical representation we adopted compresses the central region and *greatly* expand the areas near the boundaries. We have used the “set A” of Carlson (1963) with 3 points per octant to describe the angular dependence of the radiation field and constant Doppler profiles. The temperature of the slab was fixed to  $T = 5000$  K and the gas pressure  $p_g = 1$  dyn cm $^{-2}$ . Finally, we adopted the standard benchmark models for multi-level atom problems proposed by Avrett (1968; see also Paletou & Léger 2007) considering, in particular, its 3-level H I atomic model.

The respective rates of convergence for the SOR and MG-2D multilevel iterative processes are displayed in Fig. 6 where we have plotted the maximum relative change on the level populations (i.e., the  $\infty$ -norm) from one iteration to another  $R_c$ . The computation time for the MALI, GS, SOR, and MG 2D-multilevel iterative processes are given in Table 1 for different grid refinements. We point out that a MG scheme is not only superior in iteration numbers and computing time, it is



**Fig. 6.** Rates of convergence for the SOR (solid lines) and SOR-MG (dashed lines) 2D multilevel iterative processes. A spatial grid of 163 points per direction with  $z_{\max} = 30\,000$  km and  $y_{\max} = 5000$  km; the temperature of the atmosphere is 5000 K and the gas pressure fixed at  $p_g = 1$  dyn cm $^{-2}$ . For benchmark purposes, we adopted the simplified 3-level H I atom model taken from Avrett (1968).

also important to note that the convergence error  $C_e$ , which is defined by

$$C_e = \max \left( \frac{|n(\text{itr}) - n(\infty)|}{n(\infty)} \right) \quad (28)$$

is smaller than  $R_c$  for MG. However, for methods such as MALI or SOR a small value of  $R_c$  does not imply a small value of  $C_e$ , which means that convergence is not necessarily achieved (Fabiani Bendicho et al. 1997).

As shown in Fig. 7, where  $S(\text{H}\alpha)$  normalized to the external illumination is plotted as a function of the vertical line-center optical depth, the same variations as in 1D (solid line) are recovered along the vertical axis of symmetry of the 2D model which has the largest horizontal extension (i.e., 100 000 km). For smaller geometrical slab widths (and horizontal optical thicknesses), lateral radiative transfer effects take place and progressively affect the excitation within the slab. Note that for the smallest width (i.e., 1000 km), we properly recover an almost constant value  $S/B = 0.5$  consistent with optically thin conditions along the horizontal extension of the 2D slab. As first reported by Paletou (1997), we also recover here under which conditions 2D radiative transfer effects on the H $\alpha$  source function vertical variations can be significant; more generally, such effects are expected a priori for any other spectral lines of moderate optical thickness.

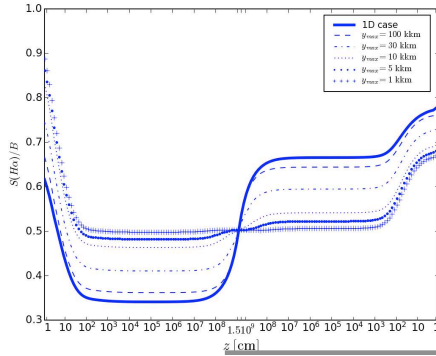
Figures 8 are contour plots of the two excited levels of hydrogen normalized to their LTE values obtained for a 30 000 km by 5000 km slab. They show both departures from LTE together with geometry effects within the slab’s atmosphere. However, since such data do not exist yet in the literature while needs for multidimensional radiative modelling tools are more and more obvious, we found Table 2 to be highly valuable for benchmark purposes and in detailing the information content of Fig. 8 about the populations distribution across the 2D slab.

## 6. Conclusions

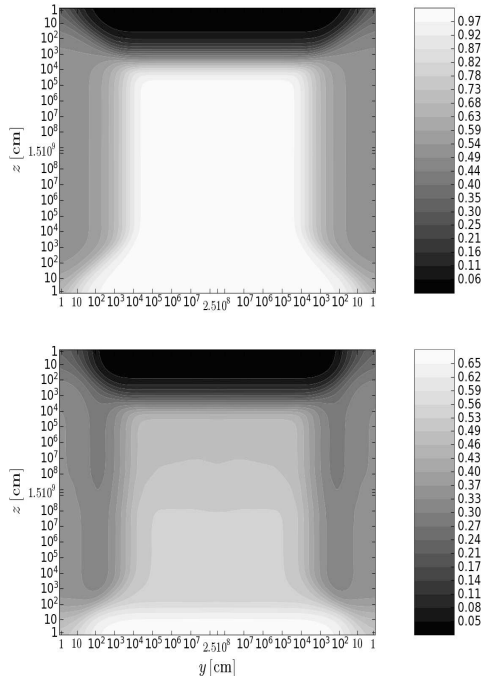
We have given here details about the implementation of GS/SOR iterative processes in 2D cartesian geometry, information which was unfortunately still missing in the astrophysical literature. We also tested, for the first time, such 2D-GS/SOR iterative schemes with a two-level atom model against original analytical results; a more comprehensive study, both in 1D and

**Table 1.** Computation time (for a Pentium-4 @ 3 GHz processor) and number of iterations for the H I multilevel benchmark model of Avrett (1968) in a 2D grid with  $y_{\max} = 5000$  km and  $z_{\max} = 30\,000$  km together with 3 angles per octant and 8 frequencies; the temperature of the atmosphere is 5000 K and the gas pressure  $p_g = 1$  dyn cm $^{-2}$ .

Points number	MALI 2D	GSM 2D	SOR 2D	MG 2D	$R_c$
$123 \times 123$	3 min 9 s (46)	2 min 19 s (29)	1 min 17 s (16)	55 s (11)	$1.1 \times 10^{-2}$
$163 \times 163$	9 min 39 s (79)	6 min 56 s (48)	3 min 33 s (24)	1 min 52 s (13)	$2.1 \times 10^{-3}$
$203 \times 203$	22 min 47 s (116)	14 min 36 s (68)	7 min 34 s (33)	2 min 50 s (14)	$5.7 \times 10^{-4}$
$243 \times 243$	45 min 32 s (158)	29 min 10 s (90)	14 min 3 s (43)	4 min 13 s (14)	$1.9 \times 10^{-4}$



**Fig. 7.** Vertical variations of the H $\alpha$  source function (in units of B) along the symmetry axis of the 2D slab with  $z_{\max} = 30\,000$  km and different horizontal extensions  $y_{\max}$  ranging from 1000 km to  $\infty$  (1D); the temperature of the atmosphere is 5000 K and the gas pressure  $p_g = 1$  dyn cm $^{-2}$ . The solid line represents  $S(H\alpha)/B$  variations computed in 1D. Note that abscissae give geometrical positions computed downwards from the top surface up to mid-slab and then, symmetrically, upward from slab bottom.



**Fig. 8.** Contour diagram of (top) the second-level populations  $n_2/n_2^*$  and (bottom) the third-level populations  $n_3/n_3^*$  in a grid with  $y_{\max} = 5$  kkm,  $z_{\max} = 30$  kkm,  $T = 5000$  K and  $p_g = 1$  dyn cm $^{-2}$ . The slab is illuminated from below with a Planck function and  $n_2^*$  and  $n_3^*$  are LTE values. Horizontal and vertical axes are defined as described in Fig. 7.

in 2D, is being conducted and results will be published elsewhere.

Concerning the modelling of illuminated freestanding slabs, even though we used quite a simple atomic model, we found it to be a necessary stage not only to validate our numerical work but also to take the opportunity to deliver reliable 2D multilevel benchmark results; typical CPU usage numbers were also given, clearly in favour of the combination of SOR plus MG methods for complex radiative modelling.

We anticipate that such numerical techniques and benchmark results will be of interest for the new radiative transfer codes currently in use or under development, not only for applications in solar physics but also for interstellar clouds (see e.g., Juvola & Padoan 2005), circumstellar environments with winds (see e.g., Georgiev et al. 2006) or accretion disks (see e.g., Korčáková & Kubát 2005) modelling for instance.

*Acknowledgements.* Our warmest thanks go to Dr. Bernard Rutily for the original idea and fruitful discussions upon the analytical test presented here; we also thank an anonymous referee for her/his valuable comments which helped us to clarify some technical points.

## Appendix A: Test case for a 2D code using 1D reference solutions

We describe a test case for radiative transfer methods in 2D cartesian geometry with stationary media, using 1D reference solutions, which are provided using an analytical method. For this purpose, the ARTY code is the numerical implementation, whose accuracy is better than  $10^{-10}$ , of exact analytical solutions, based on a mathematical method using the finite Laplace transform (Chevallier & Rutily 2005; Chevallier et al. 2003, and references therein).

Our radiative model describes a 2D medium which can scatter in 3D and is infinite and homogeneous along the  $x$ -axis ( $-\infty \leq x \leq +\infty$ ,  $0 \leq y \leq y_{\max}$ ,  $0 \leq z \leq z_{\max}$ ), thus quantities involved in the radiative transfer equation (RTE) do not depend on  $x$ . This medium is considered such that there is no incoming flux on its boundaries along the  $y$ - and  $z$ -axes. In order to compare this 2D case to 1D solutions from ARTY, we consider here the 2D primary source to be an infinite line along the  $x$ -axis, located at the center of the slab, emitting isotropically, and the medium homogenous and isotropically scattering; the later is also monochromatic i.e., the RTE does not depend on the frequency (which will not be mentioned hereafter) as is the case when we describe the continuum or a spectral line with the Milne profile, which is constant over any finite energy range and 0 elsewhere.

We hereafter write the RTE in 2D cartesian geometry, and we show how to compare this 2D solution integrated on the  $y$ -axis to a 1D solution. Table A.1 sums up some values of the 1D solution at the surface  $z = 0$ . The RTE for our 2D model is (cf. Chandrasekhar 1950, Chap. I, Eq. (48) or Pomranig 1973,



**Table 2.** Second-level (top) and third-level (bottom) populations for the Avrett (1968) H I atomic model in a 2D grid of 163 points per direction with  $y_{\max} = 5000$  km and  $z_{\max} = 30\,000$  km together with 3 angles per octant and 8 frequencies; the temperature of the atmosphere is 5000 K and the gas pressure  $p_g = 1$  dyn cm $^{-2}$ .

$z$ -position	1	10	10 <sup>2</sup>	10 <sup>3</sup>	$y$ -position					
					10 <sup>4</sup>	10 <sup>5</sup>	10 <sup>6</sup>	10 <sup>7</sup>	10 <sup>8</sup>	$2.5 \times 10^8$
1	93.6107	52.4326	15.8861	6.29160	5.01322	5.02310	5.02508	5.02511	5.02517	5.02521
10	113.845	84.3495	29.7678	11.8603	9.45411	9.47290	9.47663	9.47669	9.47682	9.47690
10 <sup>2</sup>	136.951	128.456	86.6607	38.9345	31.1428	31.2092	31.2215	31.2217	31.2222	31.2225
10 <sup>3</sup>	145.777	145.248	141.607	121.020	104.541	104.935	104.976	104.977	104.979	104.980
10 <sup>4</sup>	148.677	150.732	159.910	188.041	229.865	237.425	237.537	237.539	237.543	237.545
10 <sup>5</sup>	149.219	151.755	163.283	199.744	265.198	290.210	291.726	291.727	291.732	291.736
10 <sup>6</sup>	149.257	151.825	163.517	200.529	267.018	294.048	296.308	296.366	296.371	296.375
10 <sup>7</sup>	149.259	151.829	163.530	200.576	267.127	294.182	296.502	296.640	296.645	296.648
10 <sup>8</sup>	149.255	151.823	163.517	200.557	267.101	294.153	296.473	296.611	296.597	296.593
10 <sup>9</sup>	149.243	151.801	163.469	200.491	267.010	294.051	296.370	296.509	296.499	296.494
$1.5 \times 10^9$	149.241	151.798	163.462	200.481	266.996	294.036	296.355	296.495	296.495	296.494
$3 \times 10^9 - 10^9$	149.239	151.795	163.455	200.471	266.983	294.020	296.339	296.480	296.489	296.493
$3 \times 10^9 - 10^8$	149.227	151.773	163.408	200.404	266.891	293.918	296.236	296.378	296.392	296.396
$3 \times 10^9 - 10^7$	149.223	151.767	163.394	200.386	266.866	293.890	296.207	296.348	296.344	296.341
$3 \times 10^9 - 10^6$	149.223	151.766	163.393	200.384	266.863	293.886	296.204	296.343	296.338	296.334
$3 \times 10^9 - 10^5$	149.223	151.767	163.396	200.395	266.887	293.944	296.201	296.337	296.331	296.328
$3 \times 10^9 - 10^4$	149.286	151.886	163.789	201.752	270.398	294.453	296.151	296.261	296.256	296.253
$3 \times 10^9 - 10^3$	150.529	154.236	171.626	228.713	285.362	295.302	296.043	296.091	296.086	296.083
$3 \times 10^9 - 10^2$	157.815	168.092	216.220	274.214	292.499	295.409	295.629	295.643	295.639	295.636
$3 \times 10^9 - 10$	179.929	210.210	266.745	287.561	293.106	293.988	294.055	294.059	294.057	294.055
$3 \times 10^9 - 1$	199.795	241.337	278.860	289.983	292.923	293.390	293.426	293.428	293.427	293.426

$z$ -position	1	10	10 <sup>2</sup>	10 <sup>3</sup>	$y$ -position					
					10 <sup>4</sup>	10 <sup>5</sup>	10 <sup>6</sup>	10 <sup>7</sup>	10 <sup>8</sup>	$2.5 \times 10^8$
1	1.86186	1.39630	0.486537	0.153291	0.118500	0.118255	0.118259	0.118240	0.118095	0.118004
10	2.04988	1.69002	0.627277	0.207928	0.161807	0.161613	0.161631	0.161604	0.161402	0.161275
10 <sup>2</sup>	2.39169	2.20327	1.31802	0.534052	0.422122	0.422372	0.422476	0.422406	0.421855	0.421507
10 <sup>3</sup>	2.59030	2.47736	2.04905	1.61663	1.38949	1.39398	1.39445	1.39422	1.39235	1.39117
10 <sup>4</sup>	2.65493	2.56695	2.29196	2.50136	3.04375	3.14272	3.14409	3.14357	3.13933	3.13665
10 <sup>5</sup>	2.66696	2.58361	2.33664	2.65572	3.50992	3.83926	3.85912	3.85848	3.85327	3.84998
10 <sup>6</sup>	2.66789	2.58487	2.33988	2.66628	3.53420	3.89018	3.92008	3.92026	3.91497	3.91163
10 <sup>7</sup>	2.66898	2.58607	2.34158	2.66891	3.53832	3.89491	3.92572	3.92885	3.92452	3.92119
10 <sup>8</sup>	2.67909	2.59711	2.35631	2.68839	3.56437	3.92360	3.95464	3.95879	3.97321	3.97675
10 <sup>9</sup>	2.71539	2.63671	2.40913	2.75824	3.65778	4.02648	4.05820	4.06111	4.07079	4.07557
$1.5 \times 10^9$	2.72068	2.64248	2.41682	2.76842	3.67139	4.04146	4.07319	4.07500	4.07460	4.07610
$3 \times 10^9 - 10^9$	2.72615	2.64845	2.42479	2.77894	3.68546	4.05695	4.08873	4.08978	4.08135	4.07652
$3 \times 10^9 - 10^8$	2.76248	2.68807	2.47763	2.84882	3.77890	4.15986	4.19231	4.19203	4.17766	4.17398
$3 \times 10^9 - 10^7$	2.77246	2.69897	2.49216	2.86803	3.80459	4.18815	4.22083	4.22152	4.22589	4.22921
$3 \times 10^9 - 10^6$	2.77348	2.70008	2.49365	2.86999	3.80721	4.19103	4.22384	4.22638	4.23167	4.23501
$3 \times 10^9 - 10^5$	2.77363	2.70025	2.49389	2.87039	3.80787	4.19223	4.22439	4.22699	4.23228	4.23561
$3 \times 10^9 - 10^4$	2.77557	2.70281	2.50008	2.89035	3.85874	4.20084	4.22507	4.22730	4.23259	4.23593
$3 \times 10^9 - 10^3$	2.81121	2.75044	2.62027	3.28700	4.08933	4.23074	4.24134	4.24270	4.24796	4.25128
$3 \times 10^9 - 10^2$	3.08898	3.10503	3.45736	4.22654	4.48790	4.52946	4.53266	4.53348	4.53832	4.54137
$3 \times 10^9 - 10$	3.71314	3.95438	4.74064	5.11335	5.21097	5.22648	5.22770	5.22826	5.23210	5.23452
$3 \times 10^9 - 1$	3.99111	4.39634	5.06123	5.33812	5.40867	5.41987	5.42076	5.42127	5.42483	5.42707

Eq. (2.60), without derivative over  $x$  though)

$$\sin \theta \sin \varphi \frac{\partial I}{\partial y}(y, z, \theta, \varphi) + \cos \theta \frac{\partial I}{\partial z}(y, z, \theta, \varphi) = -\chi[I(y, z, \theta, \varphi) - S(y, z)], \quad (\text{A.1})$$

where  $I$  is the specific intensity of the radiative field at  $(y, z)$  and in the direction  $(\theta, \varphi)$  of the unit vector  $\mathbf{n}$  whose coordinates along  $x$ ,  $y$ , and  $z$  are  $\sin \theta \cos \varphi$ ,  $\sin \theta \sin \varphi$ , and  $\cos \theta$ , respectively.  $\chi$  is the constant opacity of the *homogeneous* medium, and  $S$  is the unknown source function which can be written

$$S(y, z) = S^*(y, z) + \varpi J(y, z). \quad (\text{A.2})$$

$S^*$  describes the *primary source function* i.e., the direct *known* radiative field emitted by internal sources,  $\varpi = (1 - \epsilon)$  is the

constant scattering coefficient of the *homogeneous* medium for simple scattering processes, usually called albedo, and  $J$  is the mean intensity of the radiative field defined as

$$J(y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \theta I(y, z, \theta, \varphi); \quad (\text{A.3})$$

the primary source function is

$$S^*(y, z) = \frac{L}{\chi} \delta\left(y - \frac{y_{\max}}{2}\right) \delta\left(z - \frac{z_{\max}}{2}\right), \quad (\text{A.4})$$

where  $L$  is the luminosity per unit length along the  $x$ -axis. Dividing by  $\chi$  means that the source function is an emissivity divided by the opacity. In order to use 1D solutions as a

**Table A.1.** Reference solutions from the ARTY code at the surface  $z = 0$  for our test case with  $L = 1$ ,  $\chi = 1$ ,  $z_{\max} = 100$  and  $\varepsilon = 0.01$  (see the text for the values of  $\mu_i$ ).

ARTY results	
$S(0)$	$2.710704655 \times 10^{-4}$
$J(0)$	$2.738085511 \times 10^{-4}$
$H(0)$	$1.600980711 \times 10^{-4}$
$K(0)$	$1.130399095 \times 10^{-4}$
$I(0, \mu_1)$	$7.837047273 \times 10^{-4}$
$I(0, \mu_2)$	$6.965481933 \times 10^{-4}$
$I(0, \mu_3)$	$5.880635905 \times 10^{-4}$
$I(0, \mu_4)$	$4.026985767 \times 10^{-4}$

reference, we must integrate the 2D solutions on  $y$  over  $[0, y_{\max}]$  and on  $\varphi$  over  $[0, 2\pi]$ . We thus define new functions as

$$\tilde{I}(z, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{y_{\max}} dy \int_0^{2\pi} d\varphi I(y, z, \theta, \varphi). \quad (\text{A.5})$$

Similarly we define  $\tilde{S}(z) = \tilde{S}^*(z) + \varpi \tilde{J}(z)$ ,  $\tilde{S}^*(z) = L/\chi \delta(z - z_{\max}/2)$ ,  $\tilde{J}(z)$  and the two successive moments, the radiative flux  $\tilde{H}(z)$ , and the radiative pressure  $\tilde{K}(z)$  as

$$[\tilde{J}, \tilde{H}, \tilde{K}](z) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \tilde{I}(z, \theta) [1, \cos \theta, \cos^2 \theta] \sin \theta d\theta. \quad (\text{A.6})$$

Integrating over  $y$  and  $\varphi$ , and using the symmetry property valid for  $\varphi \in [0, \pi]$ :  $I(y_{\max}, z, \theta, \varphi) = I(0, z, \theta, \pi + \varphi)$ , due to the central primary source, Eq. (A.1) becomes

$$\begin{aligned} \frac{\sin \theta}{\pi} \int_0^\pi \sin \varphi I(y_{\max}, z, \theta, \varphi) d\varphi + \cos \theta \frac{\partial \tilde{I}}{\partial z}(z, \theta) = \\ -\chi [\tilde{I}(z, \theta) - \tilde{S}(z)], \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

where the integral is nul only for  $\theta = 0$  or  $\pi$ ; note that this simplification is fictitious as, even for these angles, the source function depends on the mean intensity which depends on the boundaries due to the angular integration. This problem is not classical and we need to let  $y_{\max} \rightarrow +\infty$  in order to suppress this term i.e., the radiation of the primary source is nul at the infinite and Eq. (A.7) then reduces to the well-known 1D equation:

$$\mu \frac{\partial I}{\partial z}(z, \mu) = -\chi [I(z, \mu) - S(z)], \quad (\text{A.8})$$

where  $\mu = \cos \theta$ .

Equation (A.8) is usually expressed in optical depth coordinates  $\tau(z) = \int_z^{z_{\max}} \chi(z') dz' = \chi(z_{\max} - z)$ . We do not write the RTE, but the primary source function becomes  $S^*(\tau) = L\delta(\tau - \tau_{\max}/2)$  due to the Dirac transformation  $\delta(z) = \chi\delta(\chi z)$ . Accordingly, our 2D primary source function becomes

$$S^*(\tau_y, \tau_z) = \chi L \delta\left(\tau_y - \frac{\tau_{y_{\max}}}{2}\right) \delta\left(\tau_z - \frac{\tau_{z_{\max}}}{2}\right), \quad (\text{A.9})$$

where  $\tau_y = \chi(y_{\max} - y)$  and  $\tau_z = \chi(z_{\max} - z)$ . In order to simplify the test of a 2D code with a 1D reference solution, the values  $L = 1$  and  $\chi = 1$  should be used.

We give in Table A.1 some values of the 1D solution at the surface  $z = 0$ , for the source function, the specific intensity for the directions of the angular grid used in this paper, and its three first moments. When integrating all angles over the azimuthal angle  $\varphi$ , the 10-points per octant angular quadrature resume to a 4-points per quadrant, i.e.  $[J, H, K](z) = \sum_{i=1,4} w_i [1, \mu_i, \mu_i^2] I(z, \mu_i)$  for such a case where there is no incoming flux. The four directions  $\mu_i$  are 0.95118969679, 0.78679579496, 0.57735025883, 0.21821789443 and the integration weights  $w_i$  are 0.063490696251, 0.091383516788, 0.12676086649, 0.21836490929, respectively. It is interesting to note that, using the reference solutions, the angular quadrature for  $J$ ,  $H$ , and  $K$  will lead to a relative error equal to 0.8%, 0.3%, and 0.4%, respectively.

## References

- Auer, L. H., & Paletou, F. 1994, A&A, 285, 675  
Auer, L. H., Fabiani Bendicho, P., & Trujillo Bueno, J. 1994, A&A, 292, 599  
Avrett, E. H. 1968, in *Resonance Lines in Astrophysics*, ed. R. G. Athay, J. Mathis, & A. Skumanich (Boulder: National Center for Atmospheric Research), 27  
Carlson, B. G. 1963 in *Methods in Computational Physics*, Vol. 1, ed. B. Alder, S. Fernbach, & M. Rotenberg (New York: Academic Press), 1  
Chandrasekhar, S. 1950, *Radiative transfer* (Oxford: Clarendon Press)  
Chevallier, L., & Rutily, B. 2005, JQSRT, 91, 373  
Chevallier, L., Paletou, F., & Rutily, B. 2003, A&A, 411, 221  
Fabiani Bendicho, P., Trujillo Bueno, J., & Auer, L. H. 1997, A&A, 324, 161  
Georgiev, L. N., Hillier, D. J., & Zsargó, J. 2006, A&A, 458, 597  
Gouttebroze, P. 2006, A&A, 448, 367  
Hackbusch, W. 1985, *Multi-Grid Methods and Applications* (Berlin: Springer)  
Heinzel, P., & Anzer, U. 2001, A&A, 375, 1082  
Heinzel, P., & Anzer, U. 2005, A&A, 442, 331  
Juvela, M., & Padoan, P. 2005, ApJ, 618, 744  
Korčáková, D., & Kubát, J. 2005, A&A, 440, 715  
Kunasz, P. B., & Auer, L. H. 1988, JQSRT, 39, 67  
Labrosse, N., & Gouttebroze, P. 2001, A&A, 380, 323  
Labrosse, N., & Gouttebroze, P. 2004, ApJ, 617, 614  
Landi Degl'Innocenti, E. 1982, Sol. Phys., 79, 291  
López Ariste, A., & Casini, R. 2002, ApJ, 575, 529  
Merenda, L., Trujillo Bueno, J., Landi Degl'Innocenti, E., & Collados, M. 2006, ApJ, 642, 554  
Mihalas, D. 1978, *Stellar Atmospheres* (San Francisco: Freeman)  
Olson, G. L., Auer, L. H., & Buchler, J. R. 1986, J. Quant. Spectros. Radiat. Transfer, 35, 431  
Olson, G. L., & Kunasz, P. B. 1987, JQSRT, 38, 325  
Paletou, F. 1995, A&A, 302, 587  
Paletou, F. 1996, A&A, 311, 708  
Paletou, F. 1997, A&A, 317, 244  
Paletou, F., & Léger, L. 2007, JQSRT, 103, 57  
Paletou, F., Vial, J. C., & Auer, L. H. 1993, A&A, 274, 571  
Paletou, F., López Ariste, A., Bommier, V., & Semel, M. 2001, A&A, 375, 39  
Pomraning, G. C. 1973, *Radiation hydrodynamics* (Oxford: Pergamon Press)  
Trujillo Bueno, J., & Fabiani Bendicho, P. 1995, ApJ, 455, 646  
van Noort, M., Hubeny, I., & Lanz, T. 2002, ApJ, 568, 1066



# 5

## Une très brève histoire de la physique solaire

---

Dans ce chapitre, je vais dresser un rapide panorama des différentes structures observables dans l'atmosphère solaire, depuis les taches solaires jusqu'aux éjections de masse coronale. Toutes ces structures ont un lien avec le champ magnétique solaire. Je me focaliserai surtout sur les protubérances solaires, qui font l'objet des applications dans les chapitres suivants. Leur étude est en effet d'intérêt dans le cadre de la météorologie spatiale. En effet, les éjections de masse coronale, d'immenses "bulles" de gaz expulsées de la couronne solaire, sont associées dans  $\sim 40\%$  des cas à des protubérances *éruptives* (Subramanian & Dere [129]) et peuvent avoir des effets importants sur l'environnement Soleil-Terre (voir par exemple Webb et al.[139]). Je terminerai ce chapitre par la modélisation que j'ai adoptée pour une protubérance solaire.

### 5.1 L'atmosphère solaire : une intense activité...

L'observation du Soleil dans le visible revient à observer la *photosphère*. Cette région, située à un rayon solaire du centre de l'étoile, est la zone où le plasma devient optiquement mince, permettant à la lumière de nous parvenir. C'est la base de l'atmosphère du Soleil, cette dernière s'étendant encore sur une grande distance en formant plusieurs couches : chromosphère, région de transition et couronne, puis haute couronne et vent solaire.

#### 5.1.1 La photosphère

La photosphère est une couche de quelques centaines de kilomètres d'épaisseur. Son émission est proche de celle d'un corps noir à une température de 5800 K, dont le maximum de puissance se situe donc autour de 0.5 nm, dans le jaune-vert.

Dès le début du XVII<sup>ème</sup> siècle, Fabricius et Galilée observent indépendamment des taches sombres à la surface du Soleil. Ce sont les *taches solaires* (Fig. 5.1, par exemple). En 1843, l'astronome amateur Heinrich Schwabe (1789-1875) découvre que le nombre

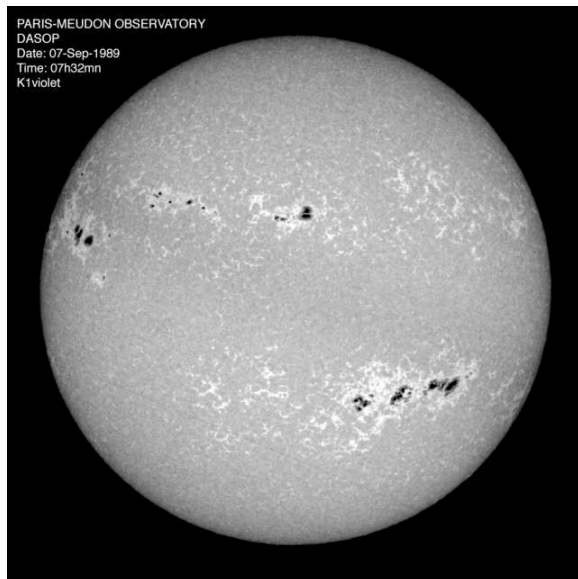


Fig. 5.1: Spectrohéliogramme du Soleil dans la partie  $K_{1v}$  de la raie  $K$  de  $\text{Ca II}$ , le 9 Septembre 1989. On peut voir plusieurs groupes de taches solaires et les facules brillantes associées. (image du spectrohéliographe de Meudon)

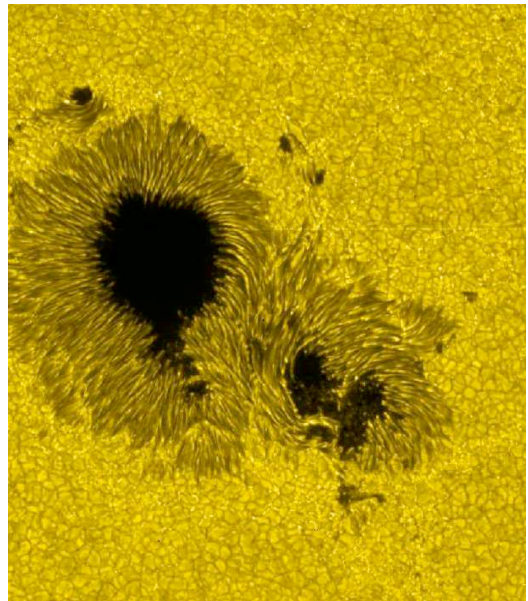


Fig. 5.2: L'ombre et la pénombre de deux taches solaire, vues par l'instrument SOT (Solar Optical Telescope) d'Hinode le 13 décembre 2006. L'ombre apparaît sombre uniquement par contraste avec le reste de la surface qui est plus chaud. On peut également voir la granulation tout autour de la tache. (image Hinode JAXA/NASA )

de ces taches à la surface du Soleil varie avec une période d'environ dix ans (Fig. 5.3). On sait en effet aujourd'hui que la durée moyenne de ce cycle d'activité solaire est de 11.1 ans, avec des variations entre 9 et 14 ans. Les taches apparaissent toujours entre  $35^\circ$  N et  $35^\circ$  S de latitude solaire, d'abord aux hautes latitudes puis progressivement vers l'équateur. Un chronogramme apparaît comme un "diagramme en papillon" (Fig. 5.4).

Les taches solaires sont composées d'une zone centrale sombre appelée ombre, entourée de structures radiales qui forment la pénombre (Fig. 5.2). L'ombre a une température de l'ordre de 3 800 K, ce qui la rend sombre par contraste avec la surface solaire environnante à 5 800 K. Le diamètre des taches solaires peut atteindre plusieurs dizaines de milliers de kilomètres. Leur durée de vie est de l'ordre de quelques jours à quelques semaines pour les plus grosses d'entre elles.

L'ensemble de la tache solaire prend naissance dans une zone active plus étendue, appelée *facule* bien observable dans la raie  $K$  de  $\text{Ca II}$  (Fig. 5.1). C'est une grande structure brillante de plusieurs centaines de milliers de kilomètres, de durée de vie de plusieurs mois. Lorsque le cycle solaire approche de son maximum, la superficie des facules est supérieure à celle des taches, ce qui rend la surface solaire plus brillante de 0.1% en moyenne.

Enfin on observe tout un réseau de cellules de *granulation* à peu près circulaires, d'environ 1 500 km de diamètre (Fig. 5.2), de durée de vie 10 min. Certaines cellules sont plus grandes de l'ordre de 30 000 km, elle sont dites de *supergranulation* (Rieutord et



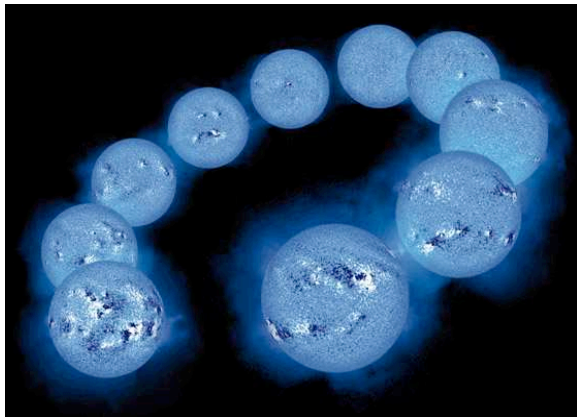


Fig. 5.3: Visualisation du cycle de Schwabe : le nombre de taches à la surface du Soleil varie d'un maximum à un autre maximum en passant par un minimum selon une durée moyenne de 11.1 ans. (images SOHO)

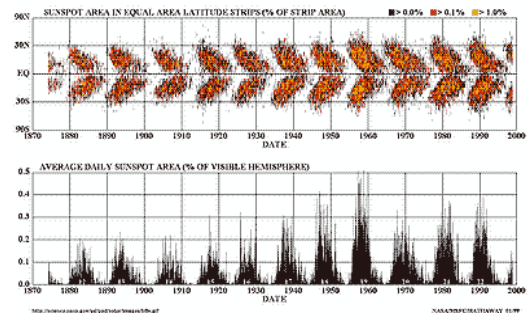


Fig. 5.4: Le "diagramme papillon" montre la variation de latitude de formation des taches solaires, en fonction des cycles solaires. Au début du cycle, les taches se forment dans les latitudes les plus hautes, autour de  $35^\circ$ . Elles se forment ensuite de plus en plus vers l'équateur solaire. (source : NASA/MSFC)

al. [118]) et observées par l'instrument CALAS au Pic du Midi (Meunier et al. [97]). Ces cellules sont des réminiscences de la zone convective du Soleil, inaccessible par l'observation directe.

### 5.1.2 La chromosphère

La couche immédiatement au-dessus de la photosphère est la *chromosphère*. C'est une région assez mince de l'ordre de 2 000 km d'épaisseur. Sa température varie entre 6 000 K juste au-dessus de la photosphère à 30 000 K dans ses couches les plus élevées. Ces températures permettent la formation de raies spectrales telles que la raie  $H\alpha$  dans le rouge, et la raie  $K$  de  $Ca II$  dans le bleu. C'est d'ailleurs dans la raie  $H\alpha$  que sont observées de nombreuses structures dynamiques.

Les *spicules* sont de petites éruptions de plasma ressemblant à de petites "lignes de feu" (Fig. 5.5). Elles ont un aspect sombre sur la surface et peuvent s'élever à plusieurs milliers de kilomètres d'altitude au-dessus de la surface solaire. Elles sont plus facilement observables au limbe du Soleil. Découvertes dès 1877 par Angelo Secchi, elles demeurent largement inexplicées, en raison notamment de leur durée de vie très courte de l'ordre de 5 à 10 minutes, et de leur petit diamètre d'environ 500 km (voir la revue de Beckers [16]).

Les *plages faculaires* sont des zones brillantes que l'on distingue très bien en  $H\alpha$  ou dans la raie  $K$  de  $Ca II$  (Fig. 5.6 par exemple). Elles sont typiquement 10 fois plus étendues que les taches au-dessus desquelles elles se trouvent. Les plages faculaires apparaissent avant les taches solaires et subsistent après leur disparition, pour une durée de vie de quelques dizaines de jours.

Les *éruptions chromosphériques* sont d'énormes explosions à la surface du Soleil (Fig. 5.7). Elles sont brèves et ne durent généralement que quelques minutes puis dimi-



Fig. 5.5: On peut voir clairement des spicules sur le limbe. Ce sont de petites éruptions de plasma qui peuvent s'élever à plusieurs milliers de kilomètres d'altitude. (image National Solar Observatory/Sacramento Peak)

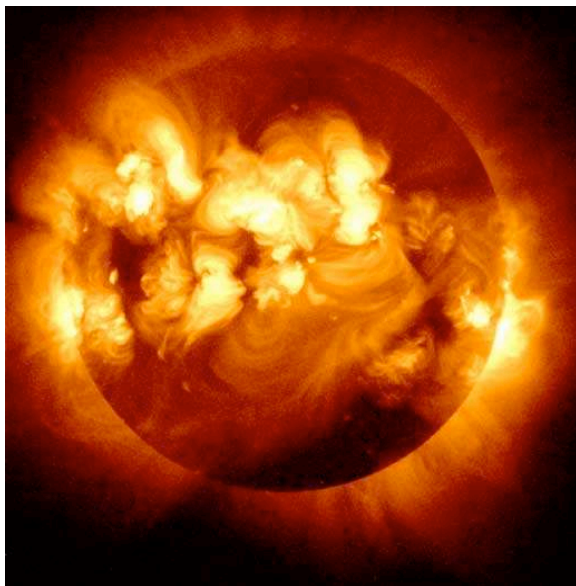


Fig. 5.7: Image composite de plusieurs éruptions chromosphériques. (image JAXA)

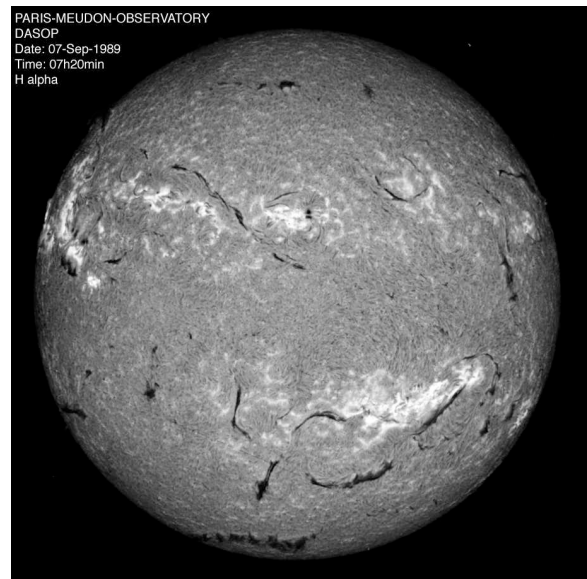


Fig. 5.6: Spectrohéliogramme en  $H\alpha$  pris le 7 Septembre 1989. On peut voir de nombreuses structures chromosphériques : plages faculaires, filaments. (image du spectrohéliographe de Meudon)

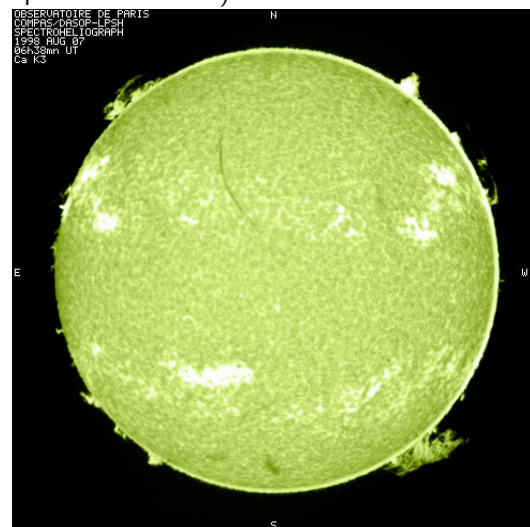


Fig. 5.8: Protubérances vues au limbe du disque solaire au centre de la raie  $K$  de  $Ca II$ . (image Observatoire de Paris — DASOP/LPSH)

nuent progressivement en l'espace d'une demi-heure à quelques heures. Mais les énergies mises en jeu sont considérables, allant quelquefois jusqu'à l'équivalent de milliards de mégatonnes de TNT. Ces éruptions sont caractérisées par une augmentation de la brillance de la surface solaire et par une montée de plasma chromosphérique dans la haute atmosphère. Pour de plus amples détails, on pourra se référer à Tandberg-Hanssen

& Emslie [131].

### 5.1.3 La couronne

La couronne est la couche la plus externe de l'atmosphère solaire. C'est un plasma complètement ionisé, à une température  $T \simeq 2\,000\,000$  K. Le très fort gradient de température entre la chromosphère et la couronne se produit dans la zone de transition. En raison de cette température très élevée, l'émission de la zone de transition et de la couronne se situe dans les rayons UV et X mous, ce qui permet de les observer sur le disque solaire en continu (par exemple l'instrument EIT de SOHO, TRACE, HINODE ou la satellite japonais Yohkoh). En lumière visible, on ne peut observer la couronne que lors d'une éclipse totale de Soleil, ou à l'aide d'un coronographe, instrument qui occulte la lumière du disque de la photosphère, inventé par Bernard Lyot en 1930. On trouve des coronographes dans des observatoires au sol (par exemple au Pic du Midi), mais aussi à bord de satellites (par exemple LASCO C2 et C3 à bord de SOHO).

Les filaments et les protubérances sont des condensations de plasma froid chromosphérique, de température  $T \simeq 8\,000$  K, dans la couronne chaude, de température  $T \simeq 10^6$  K. Leur densité est cent fois plus élevée que celle du milieu coronal qui les environne. On parle de filament lorsque la structure est observée sur le disque solaire, par exemple en absorption en  $H\alpha$  (Fig. 5.6). On parle de protubérance lorsque la structure est observée au limbe, donc en émission. Je reviendrai plus en détail sur ces structures dans le § 5.3.

Les boucles coronales sont de grandes boucles, plus chaudes et plus petites que les protubérances, visibles essentiellement en rayons X et UV confinant un gaz chaud et dense (Fig. 5.9). Elles sont situées au-dessus des régions actives. Les plumes sont des structures radiales lumineuses, évasées autour des pôles. Ces mêmes structures, plus près de l'équateur et au-dessus des régions actives sont appelées "streamers". Elles sont visibles en lumière blanche jusqu'à plusieurs dizaines de rayons solaires par les coronographes (Fig. 5.10).

Les trous coronaux sont présents en permanence autour des deux pôles du Soleil. D'autres se dispersent sur le disque et descendent même jusqu'à l'équateur. Ces régions sont plus froides et présentent une plus faible densité que la couronne moyenne. Elles apparaissent sombres sur les images en X et UV car elles sont moins émissives que le reste de la surface (Fig. 5.11).

Les éjections de masse coronale sont des expulsions violentes et soudaines de plasma de la couronne solaire (Fig. 5.12). Elles transportent des milliards de tonnes de matière qui s'éloignent du Soleil à plusieurs centaines de km/s. Le déplacement des éjections de masse coronale dans l'espace interplanétaire peut être observé au moyen de coronographes embarqués sur satellite. C'est le sujet prioritaire de missions comme STEREO.

La couronne n'a pas de frontière précise et se fond dans le milieu interplanétaire. L'expansion de la couronne se manifeste par un flot de matière ionisée qui baigne tout le système planétaire : le vent solaire. Le vent solaire dit rapide provient des trous coronaux,



sa vitesse est de l'ordre de 600 à 800 km/s. Tandis que le vent dit lent se forme au niveau des grandes plumes et de l'équateur, sa vitesse est de l'ordre de 200 à 400 km/s.

Tous les mécanismes qui régissent la formation et la dynamique de ces diverses structures ne sont pas parfaitement connus. Toutefois un élément joue un rôle majeur : le champ magnétique solaire.

## 5.2 ... d'origine magnétique



Fig. 5.9: Boucle coronale au-dessus d'une région active située au limbe, observée en UV. (image GFSC/TRACE)

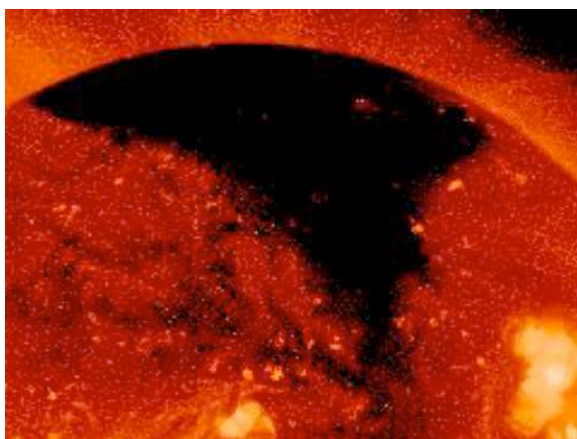


Fig. 5.11: Cette région de la couronne apparaît sombre en rayons X et UV : c'est un trou coronal. (image Yohkoh)

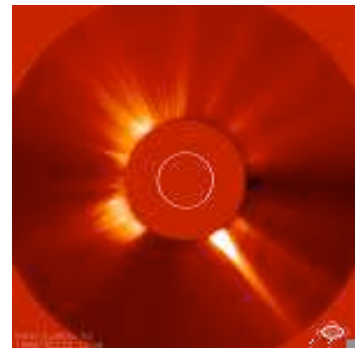


Fig. 5.10: La couronne externe du Soleil vue avec l'instrument LASCO de SOHO. On peut voir plusieurs plumes et streamers. (image LASCO/SOHO)

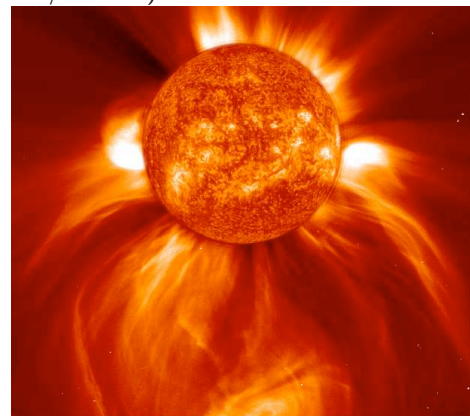


Fig. 5.12: Image du coronographe LASCO C2 de SOHO prise le 8 Janvier 2002. Elle montre une importante éjection de masse coronale. Cette image a été tournée de 90 degrés pour que le jet semble partir vers le bas. Une image de l'instrument EIT de SOHO à 304 Å d'une autre journée a été superposée pour remplir le disque occultant. (image LASCO/SOHO)

En 1908, George Ellery Hale (1868-1938), de l'Observatoire du Mont Wilson, et ses collaborateurs découvrent que les taches solaires sont fortement magnétisées, grâce à la mesure de l'effet Zeeman dans les raies d'absorption. L'effet Zeeman a été découvert en laboratoire en 1896 par P. Zeeman (del Toro Iniesta [36]). Il permet d'évaluer l'intensité d'un champ magnétique, à partir de la séparation qu'il provoque sur les raies, et son orientation, à partir de la polarisation qu'il engendre. Dans les années qui suivent, on se rend compte que le magnétisme est lié à toute l'activité solaire.

Les taches solaires apparaissent isolées ou par groupes de deux séparées en longitude mais ayant des latitudes voisines. On distingue une tache de "tête" et une tache de "queue", la première précédant la seconde au cours de la rotation du Soleil. Ces taches ont des polarités magnétiques opposées. En 1919, Hale précise les propriétés des polarités magnétiques des paires de taches solaires. Au cours d'un cycle solaire donné, elles sont toujours les mêmes dans un hémisphère solaire donné et elles sont inversées d'un hémisphère à l'autre. D'un cycle solaire à un autre, elles s'inversent dans les deux hémisphères. Ces informations révèlent que le cycle solaire est un cycle magnétique qui dure en moyenne 22 ans.

En 1955, Babcock & Babcock [13] ont montré que la surface solaire est magnétisée même en dehors des taches solaires, que le champ magnétique solaire est au premier ordre un dipôle, et que ce dipôle inverse sa polarité avec la même période que le cycle solaire. En 1961, Babcock [12] propose une explication pour cette inversion, liée aux taches solaires.

La théorie actuellement invoquée est que le champ magnétique solaire serait produit par *effet dynamo*<sup>a</sup> au niveau de la tachocline, qui est la zone de transition entre les zones radiative et convective (voir la revue de Ossendrijver [103]). Ce champ est bipolaire à grande échelle et orienté suivant l'axe de rotation du Soleil. En fait, le champ magnétique solaire est plus compliqué qu'un simple dipôle, il possède notamment une composante quadrupolaire (voir Sanderson et al. [126] pour de plus amples détails).

Les taches solaires sont des concentrations de fort champ magnétique, de l'ordre de quelques milliers de gauss, dans les régions actives. Cette concentration empêche le chauffage par convection, ce qui explique la faible température de l'ombre. La pénombre est régie par l'expansion de ces champs magnétiques dans la chromosphère. Le champ magnétique dans les facules est dix fois plus faible que dans les taches.

Les spicules suivent des lignes de champ magnétique (López Ariste & Casini [91]) mais leur origine est inconnue. Les plages faculaires se trouvent presque toujours au-dessus de régions de la photosphère associées à des concentrations du champ magnétique atteignant quelques centaines de gauss.

Les éruptions solaires ont une origine magnétique et se développent surtout dans les régions actives, au voisinage de la ligne qui sépare les taches de polarités magnétiques opposées.

Les protubérances et les filaments sont stables dans la couronne, alors qu'elle est moins dense. C'est vraisemblablement le champ magnétique qui soutient la matière de ces structures contre la gravité. J'y reviendrai plus en détail dans le § 5.3.

---

<sup>a</sup>ce sont les vitesses de rotation différentes entre les deux zones, convective et radiative, qui produisent l'effet dynamo.

Les boucles coronales sont ancrées dans des régions de fort champ magnétique, comme les plages faculaires ou les taches solaires. Elles matérialisent les lignes de champ magnétique par le plasma conducteur de la couronne. Les trous coronaux, les plumes et les streamers tracent également le champ magnétique du Soleil à grande échelle. Ainsi le vent solaire est issu de régions où les lignes de champ sont radiales.

Les éjections de masse coronale sont d'immenses bulles de gaz expulsées de la couronne solaire. Elles entraînent avec elles leur configuration magnétique. Leur origine est encore mal connue, même si des instabilités magnétiques sont probablement en cause. Elles peuvent avoir des effets importants sur l'environnement Soleil-Terre (voir par exemple Webb et al. [139]), notamment lorsqu'elles interagissent avec la magnétosphère terrestre. Elles peuvent, par exemple, endommager les satellites, perturber les radio-transmissions ou provoquer des pannes électriques, la plus célèbre étant le 13 Mars 1989 où 6 millions de personnes ont été privées d'électricité pendant plusieurs heures au Québec suite à une éjection de masse coronale survenue le 9 Mars.

L'étude de des protubérances solaires est d'intérêt dans le cadre de la météorologie spatiale. En effet, il est établi, dans 40% des cas, un lien entre protubérances éruptives et éjections de masse coronale (Subramanian & Dere [129]).

## 5.3 Les protubérances solaires

Le terme protubérance est utilisé pour décrire une variété d'objets, allant de structures relativement stables perdurant quelques mois, à des phénomènes transitoires qui durent quelques heures, voire moins. C'est une structure de matière chromosphérique dans la couronne solaire, qui est *plus dense* et *plus froid* que son environnement coronal (Leroy [80]). On parle de *filament* lorsque la structure est observée sur le disque solaire, par exemple en absorption en  $H\alpha$  (Fig. 5.14). On parle de *protubérance* lorsque la structure est observée au limbe, sur le "fond du ciel" (Fig. 5.8).

Dans et autour des régions actives, on peut voir différentes sortes de protubérances à durée de vie courte (quelques heures) et changeant rapidement. On les appelle *protubérances actives*. Sur le disque solaire, leur apparence en  $H\alpha$  n'est pas différente des filaments calmes, mais elles sont généralement plus petites et plus incurvées.

On peut subdiviser ces protubérances de régions actives en deux catégories (Tandberg-Hanssen [130]) :

- les filaments de plage sont des protubérances relativement stables, qui se trouvent au-dessus de la ligne d'inversion de la polarité du champ magnétique dans les régions actives ou au bord des régions actives. Ce sont les précurseurs des protubérances calmes et ont généralement des phases d'activité.
- les protubérances actives, comme les "surges", les jets et les boucles, montrent des changements rapides et des mouvements souvent violents. Certaines sont liées aux taches solaires ou associées aux éruptions, et parfois même confondues avec les éruptions.

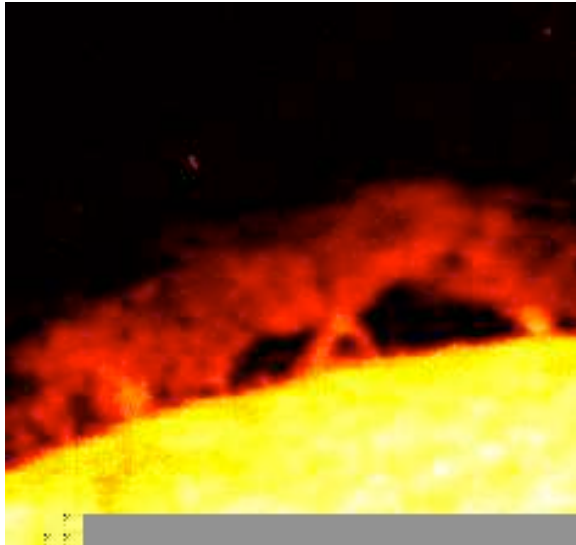


Fig. 5.13: Protubérance calme vue en  $H\alpha$  au-dessus du limbe solaire. On peut voir une structure fine spatiale majoritairement verticale, et des "pieds" connectés à la chromosphère. (image du spectrohéliographe de Meudon)

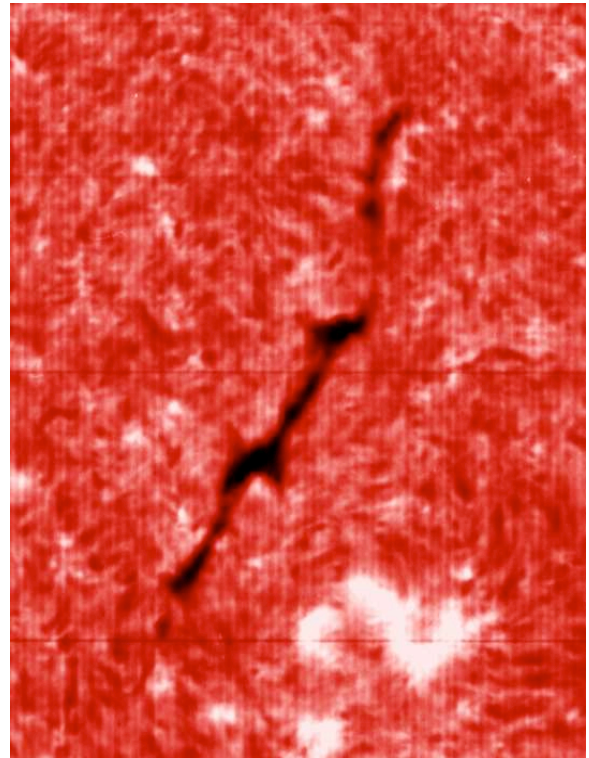


Fig. 5.14: Filament observé en  $H\alpha$  au-dessus du disque solaire. (image du spectrohéliographe de Meudon)

On appelle *protubérances calmes* ou *quiescentes* les protubérances à longue durée de vie -quelques jours à quelques mois- qui changent lentement et que l'on voit, en  $H\alpha$  par exemple, loin des régions actives avec taches solaires. Les protubérances calmes sont des structures longues et fines, quasiment verticales au-dessus de la surface solaire (Fig. 5.13). Elles consistent en une série d'arches dont les pieds sont ancrés dans la photosphère et qui s'étendent jusqu'à la couronne.

Les observations systématiques des protubérances solaires ont commencé dans les années 1940 dans la raie  $H\alpha$  (d'Azambuja & d'Azambuja [11]). Avec l'invention du coronographe par Bernard Lyot en 1930, il est devenu possible d'observer les protubérances au limbe n'importe quand et de manière quasiment aussi précise que pendant les éclipses (Fig 5.15). Cela a conduit à une classification complexe des différents types de protubérances, en fonction de leur morphologie (Tandberg-Hanssen [130]). Malgré des décennies d'étude, les mécanismes de formation des protubérances ne sont pas parfaitement connus. En particulier, aucune théorie n'explique de manière satisfaisante leur impressionnante stabilité dans un environnement moins dense qu'elles. Le champ magnétique joue probablement un rôle prépondérant dans la création et la stabilité des protubérances (voir les revues de Leroy [84], Landi Degl'Innocenti [77], Tandberg-Hanssen [130], Démoulin [37]).

Les mesures magnétographiques du champ magnétique longitudinal par effet Zeeman, dans les raies spectrales des protubérances, a ouvert la voie de la période polari-



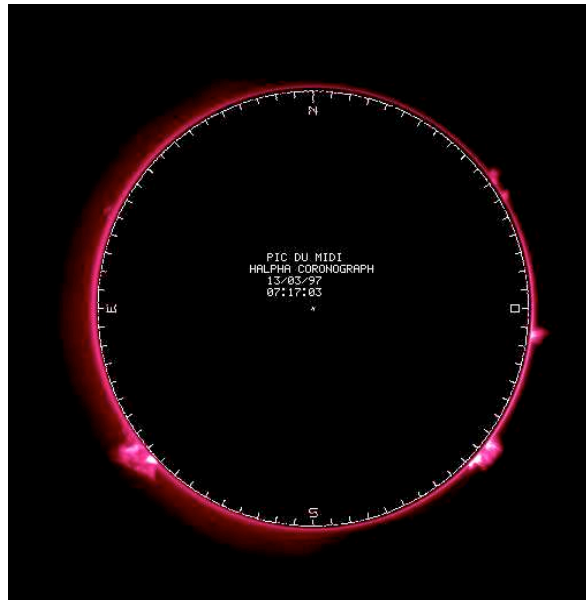


Fig. 5.15: Observation du Soleil avec le coronographe du Pic du Midi en  $H\alpha$ , le 13 Mars 1997.

métrique d'observation des protubérances solaires (Zirin & Severny [145], Ioshpa [68]).

J.-L. Leroy a conduit le travail observationnel le plus complet, à ce jour, sur la détermination du champ magnétique dans les protubérances. Il a utilisé les moyens de l'Observatoire du Pic du Midi (Ratier [117]). Ses premières mesures ont été faites sur la raie  $D_3$  de He I avec un polarimètre photo-électrique monté sur un coronographe (Leroy et al. [87], Leroy [81] [82]). C'est à l'Observatoire de Meudon qu'ont eu lieu l'analyse des données et l'interprétation des signaux de polarisation linéaire ainsi obtenus, pour déterminer l'orientation et l'intensité du champ magnétique par utilisation de l'effet Hanle (Sahal-Bréchet et al. [125], Leroy [83], Bommier & Sahal-Bréchet [23], Bommier [21], Sahal-Bréchet [124], Leroy et al. [85] [86]). L'effet Hanle a été découvert en laboratoire par W. Hanle en 1924. Il s'agit d'un mécanisme de modification de la polarisation par diffusion, dû à la présence d'un champ magnétique. La raie doit être polarisée linéairement en l'absence de champ, par exemple par diffusion d'un rayonnement anisotrope. Le champ magnétique dépolarise et fait tourner la direction de polarisation linéaire, s'il est dirigé le long de la ligne de visée dans le cas d'une diffusion à angle droit. Pour mesurer le champ il faut donc commencer par effectuer un calcul correct de la polarisation en champ magnétique nul.

Il est également possible de déterminer *complètement* le champ magnétique d'une protubérance en mesurant simultanément la polarisation linéaire à deux longueurs d'onde différentes (Bommier et al. [24]). Bommier et al. [25] ont utilisé avec succès cette technique en observant deux raies différentes, le multiplet  $D_3$  de He I et la raie  $H\alpha$  ou  $H\beta$  de H I.

Une autre possibilité est d'utiliser les deux composantes du multiplet  $D_3$ . Ceci nécessite des observations à haute résolution spectrale, car ces deux composantes ne sont séparées que de 34 pm. Les premières observations, résolues spectralement, du multiplet  $D_3$  dans les protubérances solaires ont été obtenues avec le polarimètre de Stokes du High

Altitude Observatory (HAO) au National Solar Observatory (NSO) de Sacramento Peak (Baur et al. [15] [14]). Ces nouvelles mesures ont permis la première détermination complète des champs magnétiques dans les protubérances calmes (Landi Degl'Innocenti [76], Athay et al. [5], Querfeld et al. [115]).

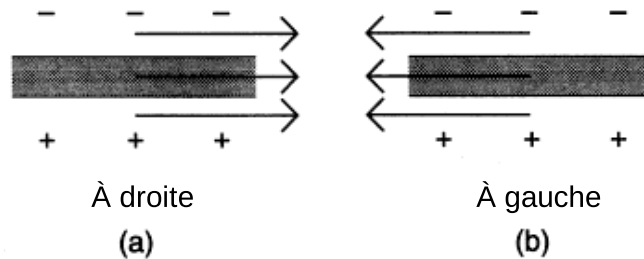


Fig. 5.16: Illustration des règles de chiralité (d'après Priest et al. [114]) : pour un observateur se tenant du côté de la polarité positive du champ photosphérique, le champ magnétique axial de la protubérance pointe (a) vers la droite pour une protubérance d'orientation à droite, ou dextroale, et (b) vers la gauche pour une protubérance d'orientation à gauche, ou sinistroale. Dans l'hémisphère nord (respectivement sud), les protubérances ont une orientation dominante à droite (respectivement à gauche).

On peut résumer les résultats importants obtenus avec toutes ces études (cf Paletou & Aulanier [108]) :

- Le champ magnétique obtenu des inversions a une intensité de 3 à 15 G dans les protubérances calmes. Les mesures Zeeman et Hanle sont en accord (voir par exemple Leroy [84], Tandberg-Hanssen [130]).
- Le champ magnétique est principalement horizontal, faisant un petit angle  $\langle \theta \rangle \sim 25^\circ$  avec l'axe long de la structure (Leroy et al. [86]).
- L'intensité du champ magnétique augmente légèrement avec l'altitude, ce qui est compatible avec la présence de lignes de champ en couches pour supporter le plasma froid des protubérances contre la gravité (Rust [119], Leroy et al. [85]).
- une grande majorité des protubérances sont de *polarité inverse* (Bommier & Leroy [22]). La composante du champ magnétique orthogonale à la protubérance est inverse à celle d'une boucle magnétique qui traverserait la protubérance. Bommier et al. [25] expliquent comment résoudre le problème de l'ambiguïté sur la direction du champ magnétique.
- les règles de chiralité (voir Fig. 5.16) : les champs magnétiques axiaux des protubérances sont *toujours* opposés à ce que prédit la rotation différentielle (voir par exemple Leroy et al. [85], Bommier & Leroy [22]). Et elles ont une orientation dominante à droite (respectivement à gauche) par rapport aux polarités photosphériques à grande échelle dans l'hémisphère nord (respectivement sud). Martin et al. [93] ont déduit ceci d'observations morphologiques, combinées à des magnétogrammes photosphériques.

Alors que la plupart des mesures directes de champ magnétique dans les protubérances sont tirées d'observations faites au limbe, Lin et al. [88] ont réalisé assez récemment la première observation spectropolarimétrique dans tous les paramètres de Stokes

d'un *filament* dans le multiplet à 10830 Å de He I. Ceci a montré l'intérêt de travailler dans ce domaine spectral puisque l'observation dans le multiplet  $D_3$  des protubérances passant sur le disque est impossible. Cela peut également servir de laboratoire géant pour des expériences de physique atomique naturelle. Citons par exemple la comparaison d'observations sur le disque et au limbe qui permet de mettre en évidence la polarisation atomique du niveau inférieur, même en présence de champs magnétiques d'une intensité de quelques G et quasi-horizontaux (Trujillo Bueno et al. [135]).

Les données spectroscopiques, et spectropolarimétriques, permettent d'obtenir des informations sur la température, la densité, la vitesse des protubérances, et le champ magnétique via l'utilisation de l'effet Zeeman et de l'effet Hanle. La magnétohydrodynamique permet d'étudier le couplage entre les mouvements des plasmas constituant les protubérances, et les champs électriques et magnétiques. Les protubérances étant des plasmas hors-ETL, il faut faire appel a priori au transfert radiatif pour prédire la forme et l'intensité des raies spectrales, et les comparer aux observations.

	Protubérance		Région de transition P-C
	Partie centrale	Bords	
$T_e$ (K)	4300-8500	8000-12000	$10^4$ - $10^6$
$\xi$ (km s $^{-1}$ )	3-8	10-20	30
$n_e$ (cm $^{-3}$ )	$10^{10}$ - $10^{11}$	$10^{9.6}$	$3 \times 10^{10}$ - $10^8$
$p_g$ (dyn cm $^{-2}$ )	0.1-1	$\sim 0.02$	$\sim 0.2$
$n(\text{H II})/n(\text{H I})$	0.2-0.9		
$B$ (Gauss)		4-20	
$V$ (km s $^{-1}$ )		$\pm 5$	$\sim 10$

Tab. 5.1: Valeurs typiques observées des paramètres physiques dans les protubérances solaires :  $T_e$  est la température,  $\xi$  est la vitesse de microturbulence,  $n_e$  est la densité électronique,  $p_g$  est la pression gazeuse,  $n(\text{H II})/n(\text{H I})$  est le rapport entre hydrogène ionisé et hydrogène neutre,  $B$  est le champ magnétique et  $V$  est la vitesse macroscopique. Tableau repris de Tandberg-Hanssen [130] (données : Hvar Reference Atmosphere of Quiescent Prominences, Engvold et al. [43])

Lorsque l'on souhaite traiter le transfert radiatif dans les protubérances, on doit faire face à de nombreuses difficultés (Tandberg-Hanssen [130]) :

- il faut prendre en compte des modèles atomiques détaillés, incluant la structure fine atomique, afin que les profils synthétiques correspondent aux profils observés.
- il faut considérer que les plus fortes raies de l'hydrogène et de l'hélium sont optiquement épaisses lorsqu'on veut prendre en compte les pertes radiatives dans les protubérances (Kuin & Poland [71]).
- la vitesse macroscopique du plasma induit des effets dits d'illumination Doppler ou d'extinction Doppler sur certaines raies (Heinzel & Rompolt [62]).
- les effets de redistribution partielle en fréquence (PRD) peuvent être importants, en particulier sur les raies fortes de l'hydrogène comme  $\text{Ly}\alpha$  (Heinzel et al. [63], Paletou et al. [111]).
- les protubérances sont en fait constitués d'éléments de structure fine spatiale, on parle de *degré de porosité*. La modélisation couramment utilisée des protubérances en géométrie 1D plan parallèle ne permet pas de reproduire les profils observés.

De nombreux auteurs ont pris en compte la porosité pour étudier la formation des raies de l'hydrogène, comme Morozhenko [100], Fontenla & Rovira [47] [48], Zharkova [142] [143], Heinzel [59], Vial et al. [137], et plus récemment par Heinzel & Anzer [61] (et articles suivants). Cette structure filamentaire permet au rayonnement extérieur de pénétrer plus profondément que si la protubérance était uniquement constituée d'une couche de matière.

Les protubérances calmes ont des dimensions typiques : en longueur entre 60000 et 600000 km, en hauteur entre 15000 et 100000 km et en épaisseur entre 5000 et 15000 km. On peut trouver chez Engvold et al. [43] les paramètres physiques typiques des protubérances calmes dont on rappelle les principaux dans le Tab. (5.1).

## 5.4 Modélisation

Je m'intéresse au transfert radiatif dans les protubérances solaires. Compte-tenu des difficultés que j'ai mentionnées précédemment, et dans le but d'obtenir des profils synthétiques les plus proches possibles de ceux observés, je vais considérer des modèles atomiques détaillés, incluant la structure fine atomique. Je ne fais aucune supposition sur l'épaisseur optique des raies étudiées. Je mets en place un modèle géométrique 2D cartésien dans le but de prendre en compte ultérieurement la structure fine spatiale des protubérances. Par contre, dans un premier temps, je vais assimiler les protubérances à des couches statiques.

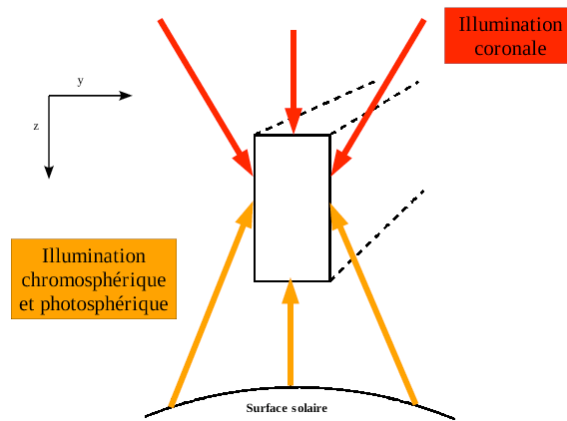


Fig. 5.17: Modèle géométrique 2D d'une protubérance : la couche isolée isobare isotherme se tient horizontalement au-dessus de la chromosphère. Dans le cas de l'hydrogène et de l'hélium, on considère une illumination chromosphérique par en-dessous et sur les deux côtés symétriquement ; on considère en plus dans le cas de l'hélium une illumination coronale constante par en-dessus. En 1D, seule la dimension selon  $y$  de la couche est finie, la dimension selon  $z$  est infinie.

Vial [136] a proposé la première modélisation 2D des protubérances sous la forme d'une couche 2D isolée, infinie selon la troisième dimension, se tenant horizontalement au-dessus de la chromosphère. La Fig. (5.17) montre le modèle géométrique que j'ai choisi : c'est une couche isolée 2D d'extensions horizontale et verticale valant typiquement



quelques milliers de kilomètres. Elle est composée d'atomes d'hydrogène et d'hélium neutres et ionisés, la proportion d'hélium étant de  $\alpha = 0.1$  par rapport à l'hydrogène, en nombre d'atomes. La couche est supposée isobare et isotherme, sa température variant typiquement de 5000 à 15000 K et la pression gazeuse de 0.01 à 1 dyn cm<sup>-2</sup>.

Je considère une illumination chromosphérique et photosphérique par en-dessous et sur les deux côtés, symétriquement, pour l'hydrogène et l'hélium, et une illumination coronale par en-dessus pour l'atome d'hélium. L'illumination coronale joue un rôle très important dans la formation de certaines raies de l'hélium, comme les multiplets à 10830 Å et  $D_3$  (Andretta & Jones [2], Mauas et al. [94]). Pour prendre en compte précisément ces conditions aux limites extérieures et sur les côtés, on choisit un échantillonnage spatial logarithmique de la couche, symétrique par rapport au centre, avec un pas très fin sur les bords.

Je dispose désormais d'un modèle de protubérance en géométrie 2D cartésienne et d'un code radiatif 2D. Afin de résoudre le problème du transfert de rayonnement dans mon modèle de protubérance, je vais présenter dans le chapitre suivant les modèles atomiques que j'ai choisis pour l'atome d'hélium et l'atome d'hydrogène.

# 6

## Transfert radiatif multi-niveaux 2D dans les protubérances solaires

---

Afin d'obtenir des profils synthétiques correspondant aux profils observés, mon code radiatif 2D doit prendre en compte des modèles détaillés pour les atomes d'hydrogène et d'hélium, incluant la structure fine dans ce dernier cas. Je vais présenter dans ce chapitre les modèles que j'ai choisis. Il faut également mettre en place une stratégie numérique adaptée afin de résoudre de manière auto-cohérente les EES et l'ETR pour les atomes d'hydrogène et d'hélium, à l'intérieur du modèle 2D de protubérance décrit au chapitre précédent. La stratégie que j'ai choisie est la suivante :

- on résout les équations de l'équilibre statistique -excitation et ionisation-, et les équations du transfert radiatif de manière auto-cohérente pour *l'atome d'hydrogène seul*. On obtient ainsi les densités de population de chaque niveau atomique et la densité électronique. On en déduit le champ de rayonnement à l'intérieur de la protubérance pour l'atome d'hydrogène. Cela définit les conditions physiques comme données d'entrée pour le calcul de l'atome d'hélium, à savoir la population atomique totale d'hélium, la densité électronique, l'opacité du continu de Lyman. On considère donc que l'hélium n'est pas donneur d'électrons.
- on résout les équations de l'équilibre statistique et d'ionisation, et les équations du transfert radiatif de manière auto-cohérente pour *l'atome d'hélium seul*, compte-tenu des données résultant du calcul de l'atome d'hydrogène.

Je vais maintenant décrire en détail chacune de ces deux étapes.

### 6.1 Transfert radiatif pour l'atome d'hydrogène seul.

#### 6.1.1 Le modèle atomique choisi et les hypothèses de travail

On commence par résoudre les EES et les ETR pour l'atome d'hydrogène dans la protubérance. J'ai choisi un modèle atomique de H I à 5 niveaux plus un continu. Les

forces d'oscillateur et les taux de transition pour l'excitation et l'ionisation collisionnelles sont donnés par Johnson [69]. Pour déterminer les rayonnements incidents pour chaque continu de l'hydrogène, on utilise la méthode de température de couleur : on définit une grille de 10 fréquences, on interpole les températures de couleur aux fréquences considérées à partir de la Tab. (2) de Gouttebroze et al. [53] et l'on convertit ces températures en intensités au moyen de la fonction de Planck. On tient compte de la dilution avec l'altitude essentiellement pour les intensités incidentes correspondant à des transitions optiquement épaisses. On résout les ETR pour toutes les transitions radiatives et seul le continu de Lyman est supposé optiquement épais. On se limite au cas de la CRD. Les profils d'absorption, et donc d'émission, sont des profils de Voigt, échantillonnés en fréquence linéairement autour du centre raie et logarithmiquement dans les ailes. Comme la couche est statique, les profils sont symétriques et on se limite à des demi-profiles pratiquement.

Comme la densité électronique  $n_e$  n'est pas connue a priori, on sait que *les EES ne sont plus linéaires* en terme de densités de population. Il faut donc déterminer simultanément la densité électronique et les densités de population en résolvant les EES. On adopte pour cela la méthode de Newton-Raphson (Paletou [104], Heinzl [60]). De manière générale on peut écrire les EES pour  $N$  niveaux liés sous la forme :

$$F_i(n_j, n_p, n_e) = 0 ; i, j = 1, \dots, N \quad (6.1)$$

où  $n_p$  est la densité de protons, donc la densité d'atomes d'hydrogène ionisés. L'équation de conservation des particules s'écrit dans notre cas :

$$(1 + \alpha) \sum_{j=1}^N n_j + (1 + \alpha)n_p + n_e = n_t, \quad (6.2)$$

où  $\alpha$  est le rapport entre le nombre total d'atomes d'hélium et le nombre total d'atomes d'hydrogène. L'équation de conservation de la charge s'écrit :

$$n_p = n_e. \quad (6.3)$$

En développant ces équations au premier ordre en termes de densités de population, on aboutit à un système d'équations linéarisées pour chaque niveau lié  $i$ ,

$$\sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial F_i}{\partial n_j} \right) \delta n_j + \left( \frac{\partial F_i}{\partial n_p} \right) \delta n_p + \left( \frac{\partial F_i}{\partial n_e} \right) \delta n_e = -F_i(n_j^o, n_p^o, n_e^o), \quad (6.4)$$

où les termes  $n^o$  correspondent à des estimées courantes. On procède de même avec les équations traduisant la conservation du nombre de particules qui deviennent

$$(1 + \alpha) \sum_{j=1}^N \delta n_j + (1 + \alpha)\delta n_p + \delta n_e = n_t - [(1 + \alpha) \sum_{j=1}^N n_j^o + (1 + \alpha)n_p^o + n_e^o], \quad (6.5)$$

et

$$\delta n_p - \delta n_e = n_e^o - n_p^o \quad (6.6)$$

pour la conservation de la charge.

On obtient donc un système de  $(N + 2)$  équations *linéaires* en  $\delta n_j$ ,  $\delta n_p$  et  $\delta n_e$ . La méthode consiste donc à inverser le système d'Eqs. (1.34) en partant d'une densité électronique donnée pour obtenir une estimée au premier ordre des populations des niveaux liés  $n_i^o$ . Ensuite on résout les équations linéarisées (6.4-6.6) pour obtenir les incréments de populations  $\delta n$  pour tous les niveaux liés et la densité électronique. Il suffit alors de calculer toutes les populations via  $n = n^o + \delta n$ .

Toutes ces données sont utilisées dans le code radiatif 2D MG+GSM/SOR que j'ai développé. Il résout de manière auto-cohérente les EES et les ETR pour l'atome d'hydrogène modélisé ici. On obtient en sortie les densités de population de chaque niveau atomique de l'hydrogène et la densité électronique, ainsi que le champ de rayonnement à l'intérieur de la protubérance. On se sert ensuite de ces données comme paramètres d'entrée pour l'atome d'hélium.

### 6.1.2 Validation des résultats

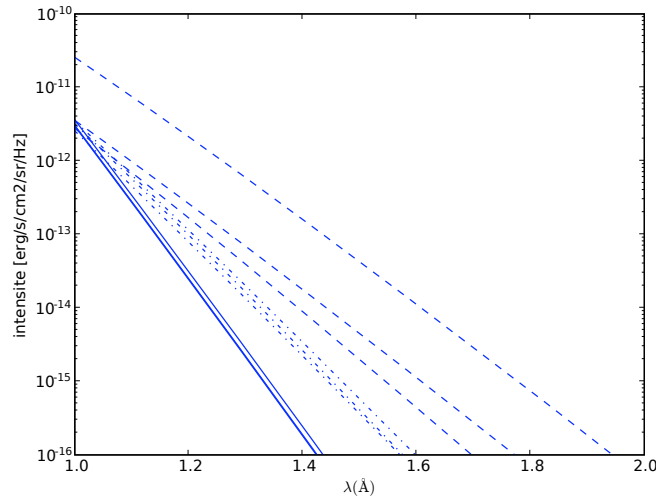


Fig. 6.1: Intensités émergentes pour le continu de Lyman en fonction de la fréquence relative ( $\nu/\nu_0$ ),  $\nu_0$  étant pris à la tête du continu. Les traits pleins correspondent à  $T = 6000$  K, les traits-lignes à  $T = 8000$  K et les tirets à  $T = 10000$  K. Trois pressions différentes sont utilisées  $p_g = 0.01$ ,  $0.05$  et  $0.5 \text{ dyn cm}^{-2}$ . A une température donnée, les intensités les plus faibles correspondent à la pression la plus basse.

Afin de valider mon code radiatif 2D, j'ai réalisé plusieurs tests pour comparer mes résultats avec ceux obtenus par Gouttebroze et al. [53] et Paletou [104]. Gouttebroze et al. [53] ont réalisé une modélisation étendue des protubérances mais en géométrie 1D

plan parallèle. Dans Paletou [104], les résultats présentés utilisent la PRD mais j'ai pu directement comparer les résultats obtenus avec mon code et celui de Paletou en CRD. Ils sont en très bon accord, à quelques % près. Dans les pages qui suivent, je vais donc donner les résultats que j'ai obtenus comme références pour des calculs en 2D de l'atome d'hydrogène.

La protubérance modélisée a pour largeur  $D_y = 5\,000$  km et pour extension verticale  $D_z = 30\,000$  km, sa température peut prendre les valeurs  $T = 6\,000, 8\,000$  ou  $10\,000$  K et sa pression gazeuse peut prendre trois valeurs  $p_g = 0.01, 0.05$  ou  $0.5$  dyn cm<sup>-2</sup>. La vitesse de micro-turbulence est  $\xi = 5$  km s<sup>-1</sup>. L'altitude du bas de la couche est  $H_0 = 10\,000$  km. J'ai choisi une grille spatiale logarithmique de 243x243 points (voir Mihalas et al. [99]), avec 3 niveaux de grille pour MG. Après de nombreux tests effectués, j'ai choisi d'utiliser 3 itérations de pré-lissage et 5 itérations de post-lissage pour MG. Ce sont les paramètres qui me garantissent, pour le cas traité ici, le meilleur compromis entre précision de la solution et temps de calcul.

Sur la Fig. (6.1), on a tracé les intensités émergentes pour une protubérance vue au limbe pour le continu de Lyman en fonction de la fréquence réduite  $\nu/\nu_0$ , où  $\nu_0$  est la fréquence de tête du continu, pour les trois températures et les trois pressions considérées. On obtient des droites conformes à celles de Heasley & Milkey [57], Gouttebroze et al. [53] et Paletou [104] : à température donnée, les intensités augmentent avec la pression. On valide ainsi le traitement du continu optiquement épais de Lyman.

Dans la Tab. (6.1), on donne les valeurs au centre de la protubérance et à la surface des populations des premier  $n_1$ , deuxième  $n_2$  et troisième  $n_3$  niveaux, densité électronique  $n_e$  et densité totale d'hydrogène  $n_H$ , pour différentes températures et pressions. On retrouve des valeurs conformes à celles données par Heinzel et al. [63].

Sur les Figs. (6.2)-(6.4), on a tracé l'intensité émergente pour les raies Ly $\alpha$ , Ly $\beta$  et H $\alpha$  pour la protubérance vue au limbe, pour les trois températures et les trois pressions considérées. On peut remarquer que la forme du profil émergent dépend fortement de la température et de la pression que l'on considère, et que la PRD utilisée par Paletou [104] joue un rôle important dans la forme des raies Ly $\alpha$  et Ly $\beta$  mais très peu pour la raie H $\alpha$ . On peut également noter les effets de géométrie 2D sur la forme des raies en comparant avec les différents modèles 1D de Gouttebroze et al. [53].

Sur la Fig. (6.5), on a tracé  $\log(n_2/n_1)$ ,  $n_1$  et  $n_2$  étant les populations des deux premiers niveaux atomiques de H I, en fonction du logarithme de la profondeur optique le long de l'axe des  $y$  au centre de la protubérance. Cela est un indicateur de la profondeur de pénétration du flux incident de photons à l'intérieur de la protubérance, qui se traduit par une excitation plus ou moins importante de l'hydrogène, c'est-à-dire par une population du premier niveau excité plus ou moins importante au centre de la couche. On peut remarquer que l'excitation au centre augmente avec la température et la pression. Ceci est conforme aux résultats obtenus en CRD par Heinzel et al. [63]. Ces derniers auteurs

T	$p_g$	$n_1(c)$	$n_2(c)$	$n_3(c)$	$n_e(c)$	$n_H(c)$
		$n_1(s)$	$n_2(s)$	$n_3(s)$	$n_e(s)$	$n_H(s)$
6000	0.01	2.861E+09	436.	1.87	4.250E+09	7.111E+09
		2.270E+09	443.	4.40	4.559E+09	6.829E+09
6000	0.05	4.201E+10	1.219E+03	5.37	6.735E+09	4.875E+10
		2.596E+10	5.062E+03	50.5	1.514E+10	4.110E+10
6000	0.5	5.292E+11	2.788E+03	13.0	1.019E+10	5.394E+11
		4.312E+11	8.405E+04	848.	6.155E+10	4.928E+11
8000	0.01	1.303E+09	235.	1.04	3.629E+09	4.932E+09
		1.169E+09	229.	2.31	3.699E+09	4.868E+09
8000	0.05	2.565E+10	1.426E+03	6.47	8.119E+09	3.377E+10
		1.587E+10	3.105E+03	31.4	1.324E+10	2.911E+10
8000	0.5	2.788E+11	9.320E+04	999.	6.952E+10	3.483E+11
		2.980E+11	5.848E+04	643.	5.949E+10	3.574E+11
10000	0.01	6.662E+08	144.	0.655	3.100E+09	3.766E+09
		6.626E+08	130.	1.33	3.102E+09	3.765E+09
10000	0.05	9.446E+09	2.721E+03	13.0	1.230E+10	2.174E+10
		9.936E+09	1.964E+03	20.2	1.204E+10	2.198E+10
10000	0.5	5.187E+10	2.666E+05	5.286E+03	1.453E+11	1.972E+11
		1.739E+11	3.733E+04	448.	8.134E+10	2.553E+11

Tab. 6.1: Valeurs au centre de la protubérance (c) et à la surface (s) des populations des premier  $n_1$ , deuxième  $n_2$  et troisième  $n_3$  niveaux, densité électronique  $n_e$  et densité totale d'hydrogène  $n_H$  pour le modèle de H I considéré ici, à différentes pressions et températures.

montrent également le rôle important joué par la PRD. Elle augmente l'excitation au centre de la couche.

Enfin sur les Fig. (6.6)-(6.9), on a tracé les cartes 2D des populations des trois premiers niveaux de l'hydrogène ainsi que la densité électronique, pour les trois températures et les trois pressions considérées ici. Les axes  $y$  et  $z$  sont en *indice de grille*, ce qui a pour effet de dilater les bords et de comprimer le centre de la couche. Ces figures montrent les écarts des populations par rapport à leurs valeurs à l'ETL, ainsi que les effets de géométrie à l'intérieur de la couche. A titre de référence, pour détailler l'information contenue dans ces figures, on fournit la Tab. (6.2) page 100 de la distribution des populations à l'intérieur de la couche pour  $T = 8000$  K et  $p_g = 0.05 \text{ dyn cm}^{-2}$ . Ceci peut servir d'élément de comparaison pour le développement d'autres codes ou méthodes.

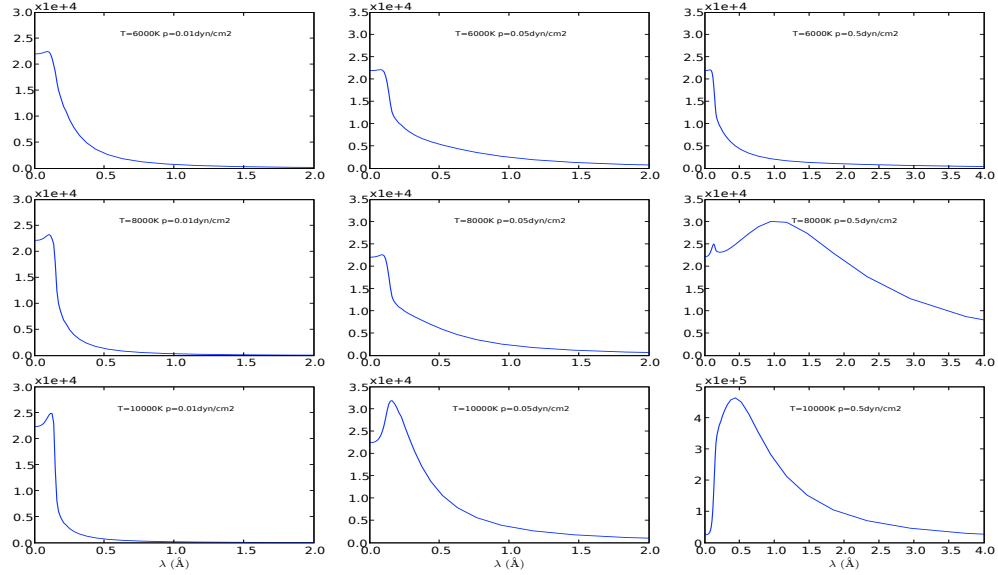


Fig. 6.2: Intensité émergente en  $\text{erg/s/cm}^2/\text{sr}/\text{\AA}$  pour la raie Lyman  $\alpha$  pour la protubérance vue au limbe en fonction de la longueur d'onde,  $\lambda = 0$  correspondant au centre de la raie, pour les trois températures et les trois pressions considérées ici.

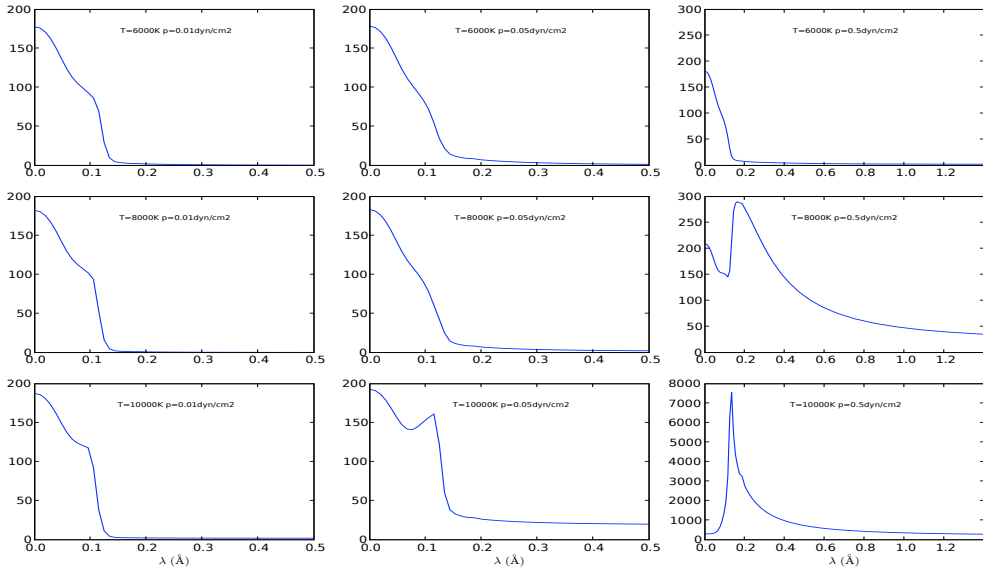


Fig. 6.3: Intensité émergente en  $\text{erg/s/cm}^2/\text{sr}/\text{\AA}$  pour la raie Lyman  $\beta$  pour la protubérance vue au limbe en fonction de la longueur d'onde,  $\lambda = 0$  correspondant au centre de la raie, pour les trois températures et les trois pressions considérées ici.

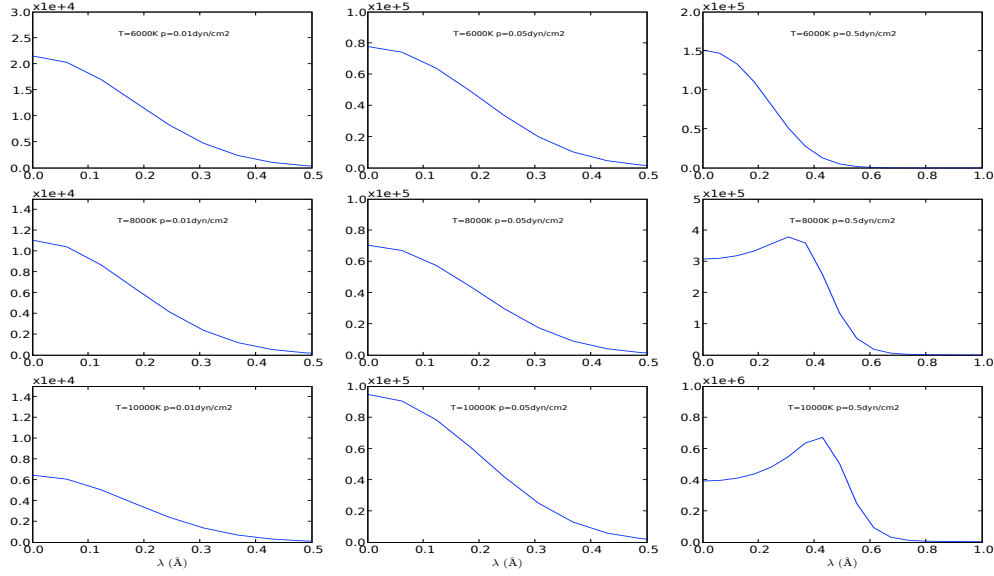


Fig. 6.4: Intensité émergente en  $\text{erg/s/cm}^2/\text{sr}/\text{\AA}$  pour la raie  $\text{H}\alpha$  pour la protubérance vue au limbe en fonction de la longueur d'onde,  $\lambda = 0$  correspondant au centre de la raie, pour les trois températures et les trois pressions considérées ici.

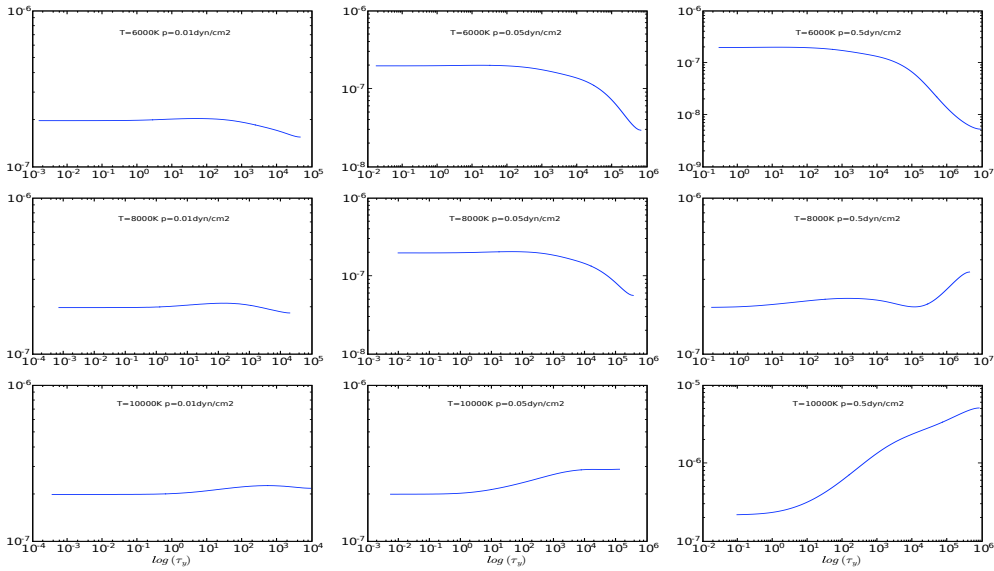


Fig. 6.5:  $\log(n_2/n_1)$  en fonction du logarithme de la profondeur optique le long de l'axe des  $y$  au centre de la protubérance, pour les trois températures et les trois pressions considérées ici ;  $n_1$  et  $n_2$  sont les populations des deux premiers niveaux atomiques de  $\text{H I}$ .



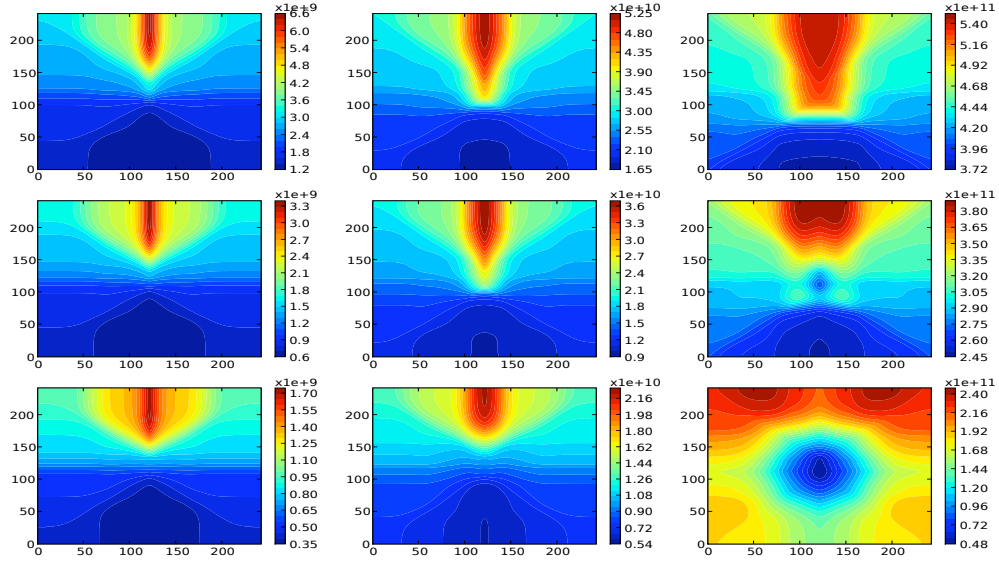


Fig. 6.6: Cartes 2D de la population du premier niveau de H I, pour les trois températures et les trois pressions considérées ici : de gauche à droite, la pression augmente et de haut en bas, la température augmente.

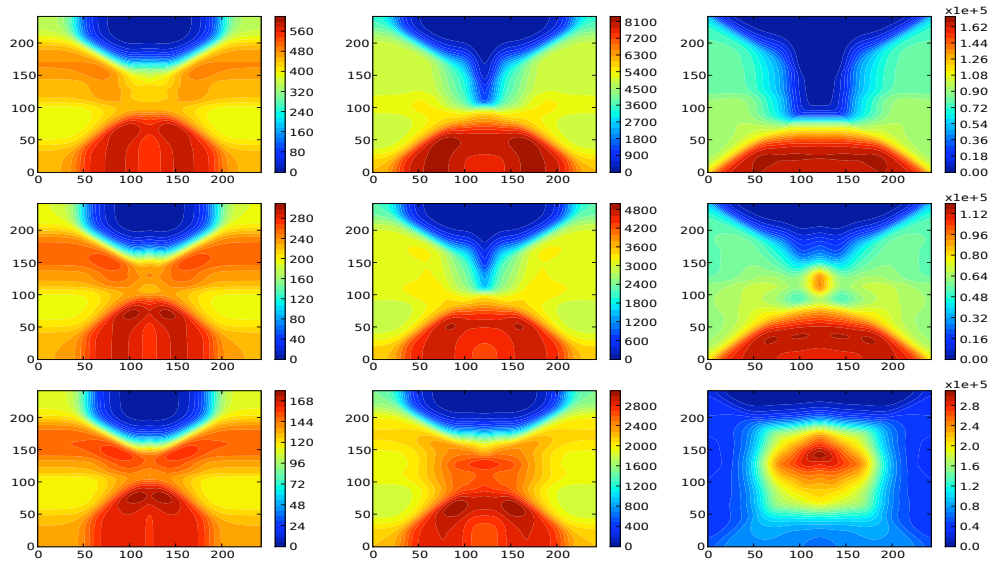


Fig. 6.7: Cartes 2D de la population du deuxième niveau de H I, pour les trois températures et les trois pressions considérées ici : de gauche à droite, la pression augmente et de haut en bas, la température augmente.

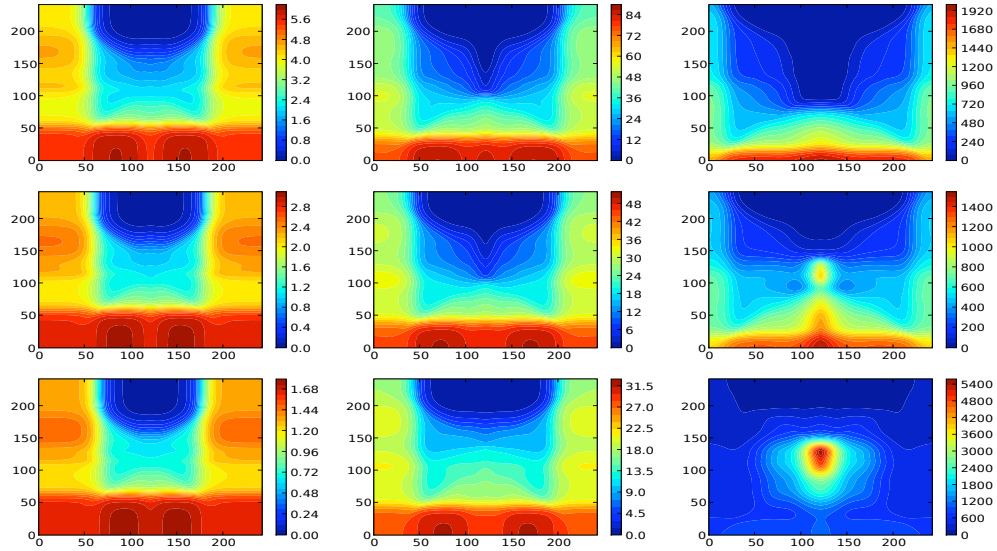


Fig. 6.8: Cartes 2D de la population du troisième niveau de H I, pour les trois températures et les trois pressions considérées ici : de gauche à droite, la pression augmente et de haut en bas, la température augmente.

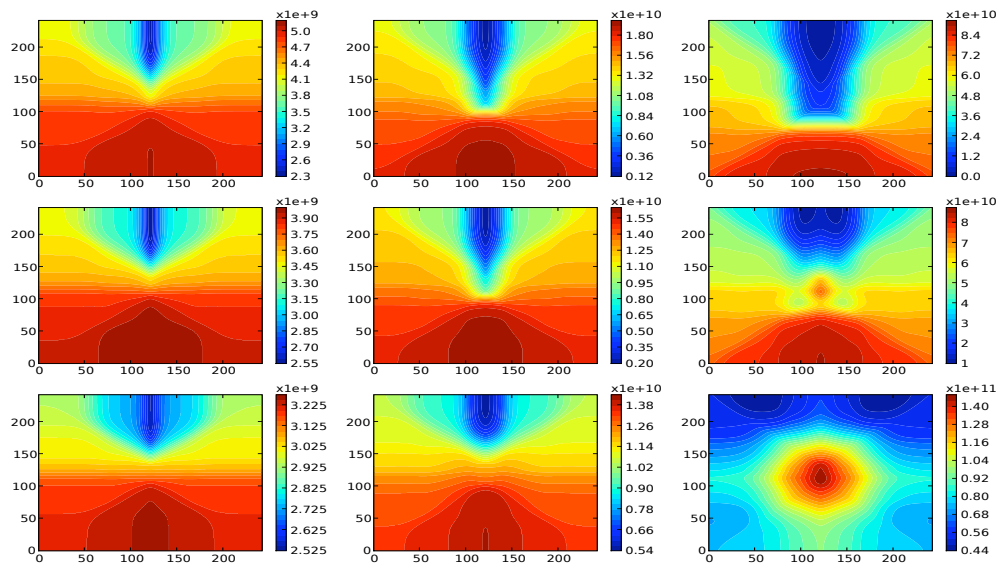


Fig. 6.9: Cartes 2D de la densité électronique, pour les trois températures et les trois pressions considérées ici : de gauche à droite, la pression augmente et de haut en bas, la température augmente.

z-position	y-position								
	$10^{-4}$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	1	10	100	1000	2500
$10^{-4}$	1.904E+10	1.921E+10	2.026E+10	2.186E+10	2.266E+10	2.338E+10	2.763E+10	3.541E+10	3.687E+10
$10^{-3}$	1.896E+10	1.905E+10	2.012E+10	2.181E+10	2.264E+10	2.337E+10	2.763E+10	3.540E+10	3.686E+10
$10^{-2}$	1.855E+10	1.861E+10	1.919E+10	2.133E+10	2.248E+10	2.331E+10	2.757E+10	3.532E+10	3.680E+10
$10^{-1}$	1.806E+10	1.808E+10	1.826E+10	1.949E+10	2.170E+10	2.297E+10	2.726E+10	3.498E+10	3.651E+10
1	1.786E+10	1.786E+10	1.792E+10	1.831E+10	1.959E+10	2.188E+10	2.624E+10	3.393E+10	3.564E+10
10	1.768E+10	1.768E+10	1.771E+10	1.793E+10	1.834E+10	1.956E+10	2.400E+10	3.190E+10	3.392E+10
100	1.716E+10	1.716E+10	1.718E+10	1.734E+10	1.760E+10	1.819E+10	2.072E+10	2.913E+10	3.152E+10
1000	1.690E+10	1.691E+10	1.692E+10	1.707E+10	1.728E+10	1.773E+10	1.967E+10	2.623E+10	2.887E+10
10000	1.625E+10	1.625E+10	1.626E+10	1.640E+10	1.660E+10	1.700E+10	1.867E+10	2.438E+10	2.611E+10
15000	1.587E+10	1.587E+10	1.589E+10	1.602E+10	1.622E+10	1.662E+10	1.823E+10	2.389E+10	2.565E+10
20000	1.546E+10	1.546E+10	1.548E+10	1.561E+10	1.581E+10	1.620E+10	1.774E+10	2.334E+10	2.514E+10
29000	1.437E+10	1.437E+10	1.438E+10	1.448E+10	1.462E+10	1.478E+10	1.553E+10	1.805E+10	1.785E+10
29900	1.327E+10	1.327E+10	1.328E+10	1.333E+10	1.334E+10	1.312E+10	1.265E+10	1.185E+10	1.176E+10
29990	1.289E+10	1.289E+10	1.288E+10	1.290E+10	1.274E+10	1.205E+10	1.103E+10	1.061E+10	1.057E+10
29999	1.278E+10	1.277E+10	1.275E+10	1.262E+10	1.198E+10	1.114E+10	1.057E+10	1.026E+10	1.023E+10
29999.9	1.249E+10	1.247E+10	1.237E+10	1.181E+10	1.104E+10	1.076E+10	1.031E+10	1.006E+10	1.004E+10
29999.99	1.209E+10	1.206E+10	1.183E+10	1.105E+10	1.077E+10	1.063E+10	1.022E+10	9.972E+09	9.956E+09
29999.999	1.190E+10	1.187E+10	1.151E+10	1.094E+10	1.074E+10	1.061E+10	1.021E+10	9.963E+09	9.947E+09
29999.9999	1.188E+10	1.182E+10	1.147E+10	1.093E+10	1.073E+10	1.061E+10	1.021E+10	9.963E+09	9.947E+09
z-position	y-position								
	$10^{-4}$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	1	10	100	1000	2500
$10^{-4}$	2.231E+03	2.096E+03	1.283E+03	385.	115.	42.3	24.5	9.04	5.33
$10^{-3}$	2.298E+03	2.226E+03	1.390E+03	428.	129.	47.5	28.0	10.7	6.35
$10^{-2}$	2.641E+03	2.591E+03	2.146E+03	773.	242.	90.4	56.6	23.5	14.1
$10^{-1}$	3.023E+03	3.009E+03	2.893E+03	2.141E+03	791.	305.	194.	82.1	49.6
1	3.144E+03	3.143E+03	3.136E+03	3.055E+03	2.300E+03	1.006E+03	636.	268.	164.
10	3.150E+03	3.153E+03	3.171E+03	3.234E+03	3.131E+03	2.372E+03	1.510E+03	636.	403.
100	3.066E+03	3.069E+03	3.091E+03	3.177E+03	3.184E+03	2.823E+03	2.198E+03	966.	635.
1000	3.037E+03	3.040E+03	3.063E+03	3.155E+03	3.192E+03	2.920E+03	2.424E+03	1.439E+03	992.
10000	3.078E+03	3.080E+03	3.103E+03	3.195E+03	3.247E+03	3.009E+03	2.553E+03	1.706E+03	1.392E+03
15000	3.106E+03	3.108E+03	3.130E+03	3.224E+03	3.277E+03	3.039E+03	2.581E+03	1.742E+03	1.426E+03
20000	3.133E+03	3.136E+03	3.159E+03	3.254E+03	3.310E+03	3.070E+03	2.608E+03	1.783E+03	1.463E+03
29000	3.140E+03	3.142E+03	3.165E+03	3.269E+03	3.377E+03	3.279E+03	2.995E+03	2.701E+03	2.750E+03
29900	2.934E+03	2.937E+03	2.960E+03	3.077E+03	3.272E+03	3.432E+03	3.485E+03	3.666E+03	3.700E+03
29990	2.866E+03	2.869E+03	2.899E+03	3.050E+03	3.390E+03	3.989E+03	4.313E+03	4.345E+03	4.357E+03
29999	2.887E+03	2.893E+03	2.944E+03	3.226E+03	4.041E+03	4.744E+03	4.707E+03	4.631E+03	4.629E+03
29999.9	2.991E+03	3.007E+03	3.139E+03	3.837E+03	4.605E+03	4.766E+03	4.622E+03	4.519E+03	4.513E+03
29999.99	3.291E+03	3.322E+03	3.595E+03	4.404E+03	4.650E+03	4.677E+03	4.514E+03	4.410E+03	4.403E+03
29999.999	3.475E+03	3.510E+03	3.924E+03	4.498E+03	4.654E+03	4.660E+03	4.494E+03	4.389E+03	4.383E+03
29999.9999	3.504E+03	3.565E+03	3.963E+03	4.509E+03	4.654E+03	4.658E+03	4.492E+03	4.388E+03	4.381E+03
z-position	y-position								
	$10^{-4}$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	1	10	100	1000	2500
$10^{-4}$	26.4	26.1	22.7	8.04	1.29	0.426	0.229	7.274E-02	4.282E-02
$10^{-3}$	26.5	26.3	22.9	8.17	1.33	0.439	0.238	7.689E-02	4.536E-02
$10^{-2}$	27.3	27.0	24.6	9.29	1.65	0.560	0.318	0.112	6.684E-02
$10^{-1}$	29.4	29.2	27.1	14.9	3.57	1.30	0.796	0.315	0.190
1	30.3	30.1	28.2	18.1	9.15	3.89	2.43	1.00	0.612
10	30.3	30.1	28.2	18.7	12.2	8.92	5.65	2.35	1.49
100	29.5	29.3	27.6	18.5	12.4	10.6	8.26	3.59	2.35
1000	29.4	29.2	27.5	18.7	12.8	11.3	9.33	5.55	3.77
10000	30.9	30.7	29.1	20.6	14.7	13.2	11.2	7.47	6.11
15000	31.4	31.3	29.7	21.3	15.4	13.8	11.7	7.89	6.47
20000	32.0	31.9	30.4	22.1	16.1	14.4	12.2	8.37	6.88
29000	33.3	33.1	31.8	24.2	18.3	17.3	15.7	14.2	14.6
29900	31.5	31.4	30.3	23.6	18.5	18.7	19.0	20.6	21.1
29990	30.9	30.8	29.7	23.6	19.2	21.9	23.8	24.7	25.1
29999	31.5	31.4	30.4	25.0	23.4	27.2	27.1	27.5	27.9
29999.9	37.1	37.0	36.4	34.3	38.0	38.7	37.8	37.8	38.1
29999.99	43.2	43.2	42.9	46.4	48.3	48.4	46.8	46.3	46.5
29999.999	44.2	44.2	44.8	48.0	49.9	49.9	48.2	47.6	47.8
29999.9999	44.3	44.4	45.0	48.2	50.0	50.1	48.3	47.7	47.9
z-position	y-position								
	$10^{-4}$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	1	10	100	1000	2500
$10^{-4}$	1.158E+10	1.149E+10	1.094E+10	1.011E+10	9.686E+09	9.309E+09	7.080E+09	3.009E+09	2.246E+09
$10^{-3}$	1.163E+10	1.158E+10	1.102E+10	1.014E+10	9.696E+09	9.314E+09	7.084E+09	3.014E+09	2.251E+09
$10^{-2}$	1.184E+10	1.181E+10	1.151E+10	1.038E+10	9.780E+09	9.347E+09	7.117E+09	3.054E+09	2.283E+09
$10^{-1}$	1.210E+10	1.209E+10	1.199E+10	1.135E+10	1.019E+10	9.522E+09	7.280E+09	3.235E+09	2.432E+09
1	1.220E+10	1.220E+10	1.217E+10	1.196E+10	1.130E+10	1.010E+10	7.813E+09	3.782E+09	2.886E+09
10	1.229E+10	1.229E+10	1.227E+10	1.217E+10	1.195E+10	1.132E+10	8.984E+09	4.845E+09	3.792E+09
100	1.257E+10	1.256E+10	1.255E+10	1.247E+10	1.233E+10	1.203E+10	1.070E+10	6.297E+09	5.049E+09
1000	1.270E+10	1.270E+10	1.269E+10	1.262E+10	1.250E+10	1.227E+10	1.125E+10	7.819E+09	6.438E+09
10000	1.305E+10	1.305E+10	1.304E+10	1.297E+10	1.286E+10	1.266E+10	1.178E+10	8.785E+09	7.878E+09
15000	1.324E+10	1.324E+10	1.323E+10	1.316E+10	1.306E+10	1.285E+10	1.201E+10	9.043E+09	8.119E+09
20000	1.346E+10	1.346E+10	1.345E+10	1.338E+10	1.327E+10	1.307E+10	1.226E+10	9.330E+09	8.390E+09
29000	1.403E+10	1.403E+10	1.402E+10	1.397E+10	1.390E+10	1.381E+10	1.342E+10	1.210E+10	1.220E+10
29900	1.460E+10	1.460E+10	1.460E+10	1.457E+10	1.457E+10	1.468E+10	1.493E+10	1.535E+10	1.540E+10
29990	1.480E+10	1.481E+10	1.481E+10	1.480E+10	1.488E+10	1.524E+10	1.577E+10	1.600E+10	1.602E+10
29999	1.486E+10	1.486E+10	1.488E+10	1.495E+10	1.529E+10	1.572E+10	1.602E+10	1.618E+10	1.620E+10
29999.9	1.502E+10	1.502E+10	1.507E+10	1.537E+10	1.578E+10	1.592E+10	1.615E+10	1.629E+10	1.630E+10
29999.99	1.523E+10	1.524E+10	1.536E+10	1.576E+10	1.592E+10	1.599E+10	1.620E+10	1.633E+10	1.634E+10
29999.999	1.532E+10	1.534E+10	1.553E+10	1.583E+10	1.593E+10	1.600E+10	1.621E+10	1.634E+10	1.635E+10
29999.9999	1.534E+10	1.537E+10	1.555E+10	1.583E+10	1.593E+10	1.600E+10	1.621E+10	1.634E+10	1.635E+10

Tab. 6.2: Populations des premier, deuxième et troisième niveaux, et densité électronique pour le modèle de H I considéré ici, avec  $T = 8000$  K et  $p_g = 0.05$  dyn cm $^{-2}$ .

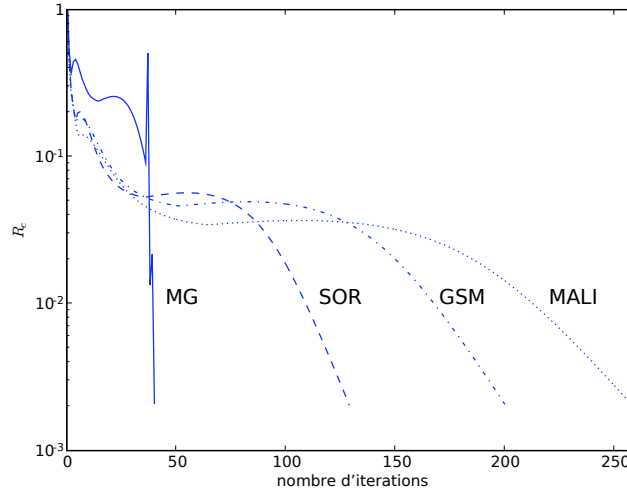


Fig. 6.10: Taux de convergence pour les processus itératifs 2D MG (traits pleins), SOR (pointillés), GSM (traits-points) et MALI (pointillés) pour  $T = 8000$  K et  $p_g = 0.05 \text{ dyn cm}^{-2}$ .

Afin de tester les performances de mon code radiatif 2D, je considère le même modèle que précédemment, pour  $T = 8000$  K et  $p_g = 0.05 \text{ dyn cm}^{-2}$ . Les taux de convergence des méthodes itératives 2D MALI, GSM, SOR et MG sont montrées sur la Fig. (6.10), où l'on a tracé le changement relatif maximum sur les populations  $R_c$ . Les temps de calcul correspondants sont donnés sur le Tab. (6.3). On note à nouveau que le processus MG présente des taux de convergence bien supérieurs et des temps de calcul bien inférieurs à ces "concurrents" pour le cas difficile numériquement qui nous intéresse ici.

Points number	MALI 2D	GSM 2D	SOR 2D	MG 2D
243x243	698min38s (259)	417min24s (201)	269min21s (130)	65min31s (41)

Tab. 6.3: Temps de calcul et nombre d'itérations pour atteindre  $R_c = 2.10^{-3}$  sur les populations,  $T = 8000$  K et  $p_g = 0.05 \text{ dyn cm}^{-2}$ .

### 6.1.3 Cas d'une couche en mouvement

L'étude des éjections de masse coronale est importante pour la météorologie spatiale, car elles affectent significativement les relations Soleil-Terre (par exemple Webb et al. [139]). Comme environ 40% des protubérances *éruptives* leur sont associées (voir par exemple Subramanian & Dere [129]), il est très intéressant d'étudier les protubérances éruptives afin de diagnostiquer la possible éjection de masse coronale. Cette dynamique est malheureusement éphémère (Tandberg-Hanssen [130]) et rend le diagnostic difficile. Une méthode de diagnostic prometteuse est basée sur l'analyse des raies optiquement épaisses de l'hydrogène (Gontikakis et al. [51], voir aussi les références dans cet article).

On va s'intéresser ici au transfert radiatif dans une structure éruptive en 2D, ce qui n'a jamais été fait pour l'instant. On considère donc le même modèle de protubérance

que précédemment mais on prend désormais en compte une vitesse macroscopique d'échappement radial de la protubérance considérée comme un corps solide. Dans ce cas les profils incidents sont décalés par effet Doppler et leur forme change (voir par exemple la Fig. 1 de Gontikakis et al. [51]). Comme les profils ne sont plus symétriques, on doit prendre en compte des profils *complets* dans toute la procédure numérique.

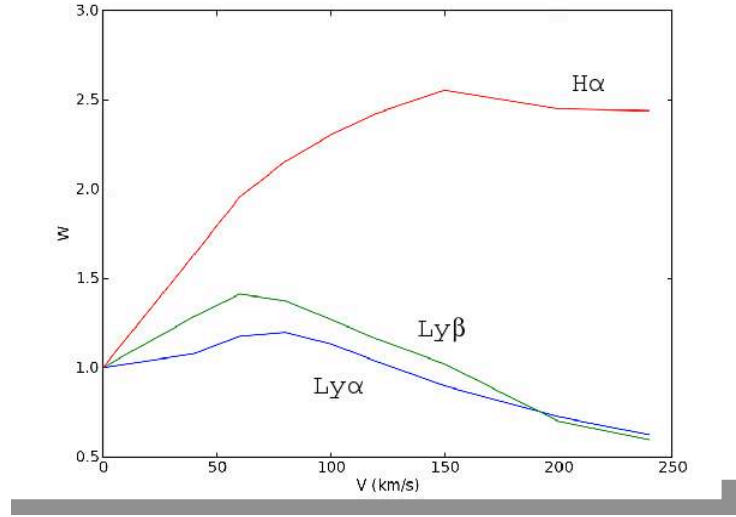


Fig. 6.11: Variations 2D de  $W$  en fonction de la vitesse radiale d'échappement  $V$ , montrant l'illumination et l'extinction Doppler des raies  $Ly\alpha$ ,  $Ly\beta$  et  $H\alpha$  de l'atome H I (Léger, Navarre et Paletou, sf2a 2007).

La Fig. 6.11 montre les variations 2D de

$$W = \frac{E(V)}{E(V=0)}$$

où  $E$  est le profil de raie intégré fréquemment en fonction de la vitesse d'échappement radial macroscopique  $V$  en  $\text{km s}^{-1}$  pour  $Ly\alpha$ ,  $Ly\beta$  et  $H\alpha$ . Une température  $T = 10\,000\text{ K}$ , une pression gazeuse  $p_g = 0.1\text{ dyn cm}^{-2}$  une vitesse microturbulente  $\xi = 0.1\text{ km s}^{-1}$  ont été utilisées. La largeur géométrique de la protubérance est  $D_y = 1\,000\text{ km}$  et sa hauteur est  $D_z = 100\,000\text{ km}$ . On retrouve dans ce cas le même comportement d'illumination et d'extinction Doppler qu'en géométrie 1D (Heinzel & Rimpolt [62]).

Même si mon code est prêt à ce genre de calculs pour une couche en mouvement, il reste à faire une étude plus exhaustive, notamment sur les effets 2D d'illumination et d'extinction Doppler.

## 6.2 Transfert radiatif pour l'atome d'hélium seul.

Une fois le problème du transfert radiatif résolu pour l'atome d'hydrogène dans la protubérance, on dispose des données d'entrée pour résoudre le problème du transfert radiatif pour l'atome d'hélium :

- le nombre total d’atomes d’hélium, qui est une fraction du nombre total d’atomes d’hydrogène,
- la densité électronique, qui devient donc une constante pour résoudre les EES de l’atome d’hélium,
- et les opacités et émissivités du continu de Lyman de l’hydrogène, pour tous les points spatiaux de la protubérance, qui vont permettre de traiter le pompage des raies UV de l’hélium par le continu de Lyman.

Je vais maintenant présenter toutes les données atomiques utilisées pour l’atome d’hélium que j’ai choisi de modéliser dans mon code de transfert radiatif (avec et sans structure fine), ainsi que la méthode utilisée dans mon code radiatif 2D pour traiter la structure fine. Je validerai ensuite le modèle choisi en comparant les premiers résultats obtenus avec les publications de Labrosse & Gouttebroze [73] (noté LG01 par la suite) qui utilisent un atome d’hélium sans structure fine, en géométrie 1D plan parallèle et en considérant la PRD pour la raie à 584 Å.

## 6.2.1 Le modèle atomique choisi et les hypothèses de travail

### 6.2.1.1 Modélisation

Pour l’hélium neutre, j’ai utilisé les données atomiques de Benjamin et al. [17]. Je considère dans mes calculs deux possibilités : soit 19 niveaux d’énergie jusqu’à  $n = 4$  sans considérer la structure fine (modèle Hen4) plus le niveau fondamental de He II, soit 17 niveaux d’énergie jusqu’à  $n = 3$  en considérant la structure fine pour les niveaux  $2^3P$ ,  $3^3P$  et  $3^3D$  (modèle Hen3sf) plus le niveau d’ionisation fondamental de He II. Les énergies et les poids statistiques sont donnés dans le Tab. (6.4) pour les deux modèles Hen4 et Hen3sf et proviennent de la base de données du NIST [116]. Les niveaux sont divisés en états individuels  $(L, S)$  ce qui permet de garder la distinction entre les niveaux singulets ( $S=0$ ) et les niveaux triplets ( $S=1$ ), distinction indispensable car ces deux systèmes ne sont pas peuplés par les mêmes mécanismes. Il n’y a pas de transitions radiatives permises entre les deux systèmes mais ils sont couplés par les mécanismes collisionnels. L’énergie d’ionisation est  $E_{ion} = 198\,310,6672\text{ cm}^{-1}$ .

Les coefficients d’ionisation collisionnelle entre un niveau  $i$  quelconque et le niveau d’ionisation  $k$  sont calculés par les formules suivantes (Benjamin et al. [17]) :

$$\begin{cases} C_{ik} = a_{Cion} \left( \frac{T}{10^4 \text{ K}} \right)^{b_{Cion}} \exp \left( c_{Cion} \frac{10^4 \text{ K}}{T} \right) \\ C_{ki} = \Phi_{ki}(T) C_{ik} \end{cases} \quad (6.7)$$

où  $\Phi_{ki}(T)$  est la fonction de Saha-Boltzmann donnée par l’Eq. (1.30), les coefficients  $a_{Cion}$ ,  $b_{Cion}$  et  $c_{Cion}$  sont donnés dans le Tab. (6.4) repris de Benjamin et al. [17] et  $T$  est la température à l’intérieur de la protubérance.

Les coefficients collisionnels entre deux niveaux liés  $i$  et  $j$  quelconques sont donnés par les formules suivantes (Aggarwal et al. [1]) :



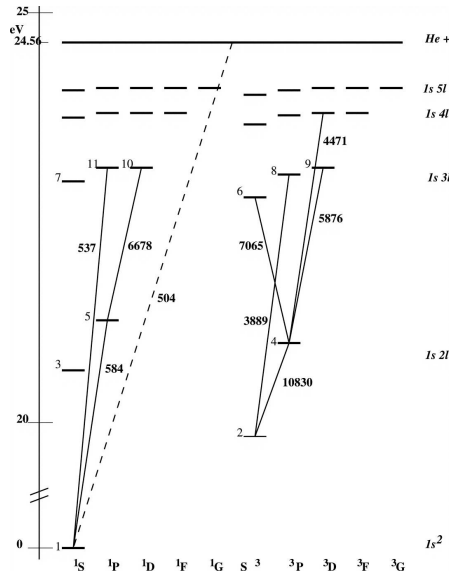


Fig. 6.12: Diagramme général des niveaux d'énergie de l'hélium neutre pris dans LG01. L'échelle en énergie entre 0 et 20 eV a été raccourcie. Les 11 premiers niveaux sont indiqués dans l'ordre croissant d'énergie. Les lignes continues montrent quelques-unes des transitions fréquemment observés dans les protubérances, et la ligne pointillée montre le continu d'ionisation à 504 Å. Les niveaux 4, 8 et 9 sont les niveaux où la structure fine est prise en compte pour le modèle Hen3sf.

$$\begin{cases} C_{ij} = \frac{8.6287 \cdot 10^{-6}}{g_i \sqrt{T}} \Omega_4 \left( \frac{T}{10^4 \text{ K}} \right)^{b_\Omega} \\ C_{ji} = \frac{g_i}{g_j} \exp \left[ \frac{hc}{k_b T} (E_j - E_i) \right] C_{ij} \end{cases} \quad (6.8)$$

où  $g_i$  et  $g_j$  d'une part,  $E_i$  et  $E_j$  d'autre part, sont respectivement les poids statistiques et les énergies des niveaux  $i$  et  $j$  considérés (voir Tab. 6.4),  $T$  est la température à l'intérieur de la protubérance et les coefficients  $\Omega_4$  et  $b_\Omega$  sont donnés dans le Tab. (A.1) repris de Benjamin et al. [17] (en annexe A). On considère les mêmes coefficients pour chaque niveau de structure fine d'un même état  $(N, L, S)$ .

Lorsque  $\Omega_4$  et  $b_\Omega$  pour une transition considérée ne sont pas données dans Benjamin et al. [17], les coefficients collisionnels sont calculés avec les formules suivantes (Benson & Kulander [18]) :

$$\begin{cases} C_{ji} = A T^n \exp \left[ \frac{\alpha hc}{k_b T} (E_j - E_i) \right] \\ C_{ij} = \frac{g_j}{g_i} \exp \left[ \frac{hc}{k_b T} (E_i - E_j) \right] C_{ji} \end{cases} \quad (6.9)$$

où les coefficients  $A$ ,  $n$  et  $\alpha$  sont donnés dans le Tab. (A.2) repris de Benson & Kulander [18] en annexe A.

Les coefficients de photoionisation et de recombinaison radiative définis par l'Eq. (1.29)



N	L	S	g	$E_n$ (cm <sup>-1</sup> )	$a_{C^{ion}}$	$b_{C^{ion}}$	$c_{C^{ion}}$
1	0	0	1.0	0.0000	3.36E-09	0.499	-28.625
2	0	1	3.0	159855.9726	9.36E-08	0.280	-5.655
2	0	0	1.0	166277.4384	1.33E-07	0.253	-4.733
2	1	1	9.0	169086.9085	1.58E-07	0.240	-4.331
2	1	0	3.0	171134.8951	1.81E-07	0.229	-4.037
3	0	1	3.0	183236.7905	5.36E-07	0.138	-2.304
3	0	0	1.0	184864.8282	6.58E-07	0.120	-2.072
3	1	1	9.0	185564.5999	7.23E-07	0.111	-1.972
3	2	1	15.0	186101.5542	7.81E-07	0.104	-1.895
3	2	0	5.0	186104.9646	7.81E-07	0.104	-1.895
3	1	0	3.0	186209.3632	7.93E-07	0.103	-1.880
4	0	1	3.0	190298.1115	1.62E-06	0.035	-1.298
4	0	0	1.0	190940.2252	1.87E-06	0.021	-1.207
4	1	1	9.0	191217.0555	2.00E-06	0.014	-1.167
4	2	1	15.0	191444.4835	2.11E-06	0.008	-1.135
4	2	0	5.0	191446.4540	2.11E-06	0.008	-1.135
4	3	1	21.0	191451.8792	2.11E-06	0.008	-1.134
4	3	0	7.0	191451.8957	2.11E-06	0.008	-1.134
4	1	0	3.0	191492.7101	2.13E-06	0.007	-1.128

N	L	S	J	g	$E_n$ (cm <sup>-1</sup> )	$a_{C^{ion}}$	$b_{C^{ion}}$	$c_{C^{ion}}$
1	0	0	0	1.0	0.0000	3.36E-09	0.499	-28.625
2	0	1	1	3.0	159855.9726	9.36E-08	0.280	-5.655
2	0	0	0	1.0	166277.4384	1.33E-07	0.253	-4.733
2	1	1	2	5.0	169086.7647	1.58E-07	0.240	-4.331
2	1	1	1	3.0	169086.8412	1.58E-07	0.240	-4.331
2	1	1	0	1.0	169087.8291	1.58E-07	0.240	-4.331
2	1	0	1	3.0	171134.8951	1.81E-07	0.229	-4.037
3	0	1	1	3.0	183236.7905	5.36E-07	0.138	-2.304
3	0	0	0	1.0	184864.8282	6.58E-07	0.120	-2.072
3	1	1	2	5.0	185564.5602	7.23E-07	0.111	-1.972
3	1	1	1	3.0	185564.5817	7.23E-07	0.111	-1.972
3	1	1	0	1.0	185564.8528	7.23E-07	0.111	-1.972
3	2	1	3	7.0	186101.5440	7.81E-07	0.104	-1.895
3	2	1	2	5.0	186101.5466	7.81E-07	0.104	-1.895
3	2	1	1	3.0	186101.5908	7.81E-07	0.104	-1.895
3	2	0	2	5.0	186104.9646	7.81E-07	0.104	-1.895
3	1	0	1	3.0	186209.3632	7.93E-07	0.103	-1.880

Tab. 6.4: Nombres quantiques, énergie, poids statistiques et paramètres permettant le calcul des taux d'ionisation collisionnelle pour l'atome He I : en haut modèle Hen4 (jusqu'à  $n = 4$  sans structure fine), en bas modèle Hen3sf (jusqu'à  $n = 3$  avec structure fine), issus de Benjamin et al. [17] complété par les données du NIST [116] pour la structure fine

entre un niveau  $i$  quelconque et le niveau d'ionisation  $k$  nécessitent la connaissance de la section efficace de photoionisation  $\sigma$ , que l'on peut trouver dans TOPBASE (Fernley et

al. [46]), ou à défaut que l'on peut calculer par la formule de Kramers de l'ion hydrogénoïde :

$$\sigma(m) = 1.0203 \times 10^{-29} \left[ \frac{10^{-8}}{E_{ion} - E_i} \left( \frac{N_{freq} + 1 - m}{m} \right)^{1/4.2} \right]^3 \quad (6.10)$$

où  $N_{freq}$  est le nombre de fréquences considérées pour la transition entre les niveaux  $i$  et  $k$ , et  $m = 1..N_{freq}$ .

Les transitions radiativement permises sont données dans le Tab. (B.1) pour le modèle Hen4 et dans le Tab. (B.2) pour le modèle Hen3sf (en annexe B). On donne également la longueur d'onde, les coefficients d'Einstein pour l'émission spontanée (Benjamin et al. [17], complété par les données du NIST [116] pour les niveaux de structure fine).

$I_c$  est le rayonnement chromosphérique associé à chaque transition radiative, il est donné par Heasley et al. [58] et multiplié par deux<sup>a</sup>, à quelques exceptions près données par Labrosse et al. [75]. Pour le multiplet à 10830 Å ils utilisent les données de Delbouille et al. [35]. Pour la raie à 584 Å ils utilisent un profil gaussien avec  $I(584) = 685 \text{ erg/s/cm}^2/\text{sr}$  et une largeur à mi-hauteur de 0.140 Å. Pour la raie à 6678 Å ils utilisent les données de Stellmacher & Wiehr [128]. Pour la raie à 537 Å ils utilisent un profil gaussien avec  $I(537) = 75 \text{ erg/s/cm}^2/\text{sr}$  et une largeur à mi-hauteur de 0.129 Å. Enfin pour toutes les raies indiquées  $T_{color}$  dans le Tab. (B.1) (en annexe B), on a utilisé la méthode de température de couleur déjà présentée précédemment, avec les données du Tab. (2b) de Heasley et al. [58]. On tient aussi compte de la dilution en fonction de l'altitude de ce rayonnement chromosphérique (Paletou [105]).

En raison de l'importance du rayonnement coronal dans la formation des multiplets  $D_3$  et 10830 Å par recombinaison à partir du niveau fondamental de He II (Andretta & Jones [2], Mauas et al. [94]), on le prend en compte dans le domaine UV, en ne tenant pas compte de la dilution en fonction de l'altitude, ce qui revient à dire que la protubérance baigne totalement dans le rayonnement coronal (voir Fig. 5.17). Les données originales se trouvent dans Tobiska [132] pour le flux solaire reçu au niveau de la Terre et sont adaptées pour le cas des structures isolées solaires dans Walhstrøm & Carlsson [138].

Dans le code que j'ai développé pour résoudre l'ETR pour l'atome d'hélium, je tiens compte du phénomène de pompage des raies UV et du continu de l'hélium par le continu de Lyman de l'hydrogène, dû à leur chevauchement en longueur d'onde. En pratique, je considère des termes d'opacité et d'émissivité de continu (donc fixes et connus) pour chacune des raies UV et du continu de l'hélium, correspondant aux termes calculés pour le continu de Lyman de l'hydrogène lors de la résolution de l'ETR pour l'atome d'hydrogène.

### 6.2.1.2 Prise en compte de la structure fine

En considérant les niveaux de structure fine pour l'atome d'hélium, les transitions radiatives correspondantes résultent de la combinaison de plusieurs transitions de struc-

<sup>a</sup>Ces auteurs utilisent un facteur de dilution qui vaut 0.5 et qui est directement inclus dans les valeurs fournies dans leur Tab. (2a).

ture fine. Par exemple le multiplet  $D_3$  est la résultante de 5 transitions de structure fine (voir la Fig. 6.13). Il faut donc considérer les EES présentées au § 1.2.2 page 15, puisque les raies de structure fine vont se chevaucher, en raison de leur élargissement Doppler (modélisé par une Gaussienne) et de la vitesse de micro-turbulence.

On va reprendre la technique de préconditionnement des EES utilisée dans le § 7.10 page 126. Toutefois dans le cas présent il est beaucoup plus judicieux d'exprimer la solution formelle de l'ETR non plus à l'aide de l'opérateur  $\Lambda$  agissant sur la fonction source mais à l'aide d'un opérateur agissant sur l'émissivité, introduit par Rybicki & Hummer [122] :

$$I_{\Omega\nu} = \Psi_{\Omega\nu} [\eta_{\Omega\nu}] \quad (6.11)$$

où  $\eta_{\Omega\nu}$  est l'émissivité totale donnée par l'Eq. (1.32). L'opérateur  $\Psi$  diffère de l'opérateur  $\Lambda$  par un facteur qui est l'opacité totale  $\chi_{\Omega\nu}$ .

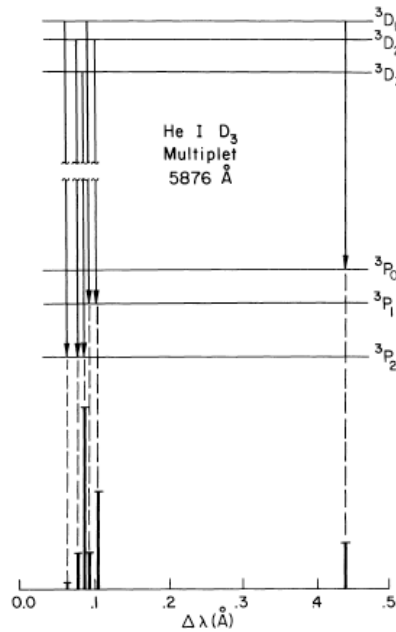


Fig. 6.13: Diagramme des niveaux d'énergie du multiplet  $D_3$  de He I, tiré de House & Smartt [66]. L'échelle en bas montre les écarts en longueur d'onde entre les différentes composantes de la raie, ainsi que leur force relative.

Le schéma itératif approché à utiliser désormais, par analogie avec le cas multiniveaux sans chevauchement de raies, consiste à remplacer l'Eq. (6.11) par

$$I_{\Omega\nu} = \Psi_{\Omega\nu}^* [\eta_{\Omega\nu}] + (\Psi_{\Omega\nu} - \Psi_{\Omega\nu}^*) [\eta_{\Omega\nu}^\dagger] \quad (6.12)$$

où  $\Psi_{\Omega\nu}^*$  est un opérateur approché convenablement choisi, et où  $\eta_{\Omega\nu}^\dagger$  est l'émissivité totale obtenue à l'itération précédente :

$$\eta_{\Omega\nu}^\dagger = \sum_{l'} n_l^\dagger U_{ll'} + \eta_c. \quad (6.13)$$

Une autre forme de l'Eq. (6.12) est obtenue en y remplaçant  $\eta_{\Omega\nu}$  et  $\eta_{\Omega\nu}^\dagger$  par les Eqs. (1.32) et (6.13) :

$$I_{\Omega\nu} = \Psi_{\Omega\nu} [\eta_{\Omega\nu}^\dagger] - \sum_{mm'} \Psi_{\Omega\nu}^* [n_m^\dagger U_{mm'}] + \sum_{mm'} \Psi_{\Omega\nu}^* [n_m U_{mm'}] \quad (6.14)$$

où l'on a considéré que l'émissivité de continu  $\eta_c$  est la même pour évaluer les émissivités anciennes et nouvelles. En utilisant cette expression de  $I_{\Omega\nu}$  dans les EES, on obtient le système d'équations préconditionnées :

$$\begin{aligned} & \sum_{l'} n_{l'} C_{l'l} + \sum_{l'} \oint d\Omega \int d\nu \left( n_{l'} U_{l'l}(\Omega, \nu) + n_{l'} V_{l'l} \Psi_{\Omega\nu} [\eta_{\Omega\nu}^\dagger] \right. \\ & \quad \left. - \sum_{mm'} n_{l'} V_{l'l} \Psi_{\Omega\nu}^* [n_m^\dagger U_{mm'}] + \sum_{mm'} n_{l'} V_{l'l} \Psi_{\Omega\nu}^* [n_m U_{mm'}] \right) \\ & = \sum_{l'} n_l C_{ll'} + \sum_{l'} \oint d\Omega \int d\nu \left( n_l U_{ll'}(\Omega, \nu) + n_l V_{ll'} \Psi_{\Omega\nu} [\eta_{\Omega\nu}^\dagger] \right. \\ & \quad \left. - \sum_{mm'} n_l V_{ll'} \Psi_{\Omega\nu}^* [n_m^\dagger U_{mm'}] + \sum_{mm'} n_l V_{ll'} \Psi_{\Omega\nu}^* [n_m U_{mm'}] \right). \end{aligned} \quad (6.15)$$

L'inconvénient de ce système est la non linéarité vis-à-vis des nouvelles populations, à cause des derniers termes de sommation de chaque côté de l'égalité qui comportent un produit entre  $n_{l'}$  et  $n_m$  à gauche, et un produit entre  $n_l$  et  $n_m$  à droite. Pour obtenir des équations linéaires, on doit modifier certaines de ces populations par leurs valeurs à l'itération précédente. En suivant Rybicki & Hummer [122], on choisit les anciennes populations pour  $n_{l'}$  et  $n_l$  et les nouvelles pour tous les  $n_m$ , ce qui conduit à un *préconditionnement total* des équations :

$$\begin{aligned} & \sum_{l'} n_{l'} C_{l'l} + \sum_{l'} \oint d\Omega \int d\nu \left( n_{l'} U_{l'l}(\Omega, \nu) + n_{l'} V_{l'l} \Psi_{\Omega\nu} [\eta_{\Omega\nu}^\dagger] \right. \\ & \quad \left. - \sum_{mm'} n_{l'} V_{l'l} \Psi_{\Omega\nu}^* [n_m^\dagger U_{mm'}] + \sum_{mm'} n_{l'}^\dagger V_{l'l} \Psi_{\Omega\nu}^* [n_m U_{mm'}] \right) \\ & = \sum_{l'} n_l C_{ll'} + \sum_{l'} \oint d\Omega \int d\nu \left( n_l U_{ll'}(\Omega, \nu) + n_l V_{ll'} \Psi_{\Omega\nu} [\eta_{\Omega\nu}^\dagger] \right. \\ & \quad \left. - \sum_{mm'} n_l V_{ll'} \Psi_{\Omega\nu}^* [n_m^\dagger U_{mm'}] + \sum_{mm'} n_l^\dagger V_{ll'} \Psi_{\Omega\nu}^* [n_m U_{mm'}] \right). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Ce système d'équations donnent les nouvelles populations  $n_l$ . Comme les équations ne sont pas indépendantes, l'une d'entre elles doit être remplacée par l'équation traduisant la conservation du nombre de particules<sup>b</sup>.

<sup>b</sup>On rappelle à ce sujet que le nombre total d'atomes d'hélium est constant pour chaque position spatiale de la protubérance : c'est une fraction du nombre total d'atomes d'hydrogène, donné par la résolution du problème de transfert pour l'hydrogène seul.

Pour des raisons de commodité de calcul, on réécrit ces équations en soulignant la linéarité en populations  $n_l$  sous la forme :

$$\sum_{l'} \Gamma_{ll'} n_{l'} = \sum_{l'} (\Gamma_{ll'}^C + \Gamma_{ll'}^R) n_{l'} = 0, \quad (6.17)$$

avec

$$\Gamma_{ll'}^C = C_{l'l} - \delta_{ll'} \sum_{l''} C_{l'l''}, \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{ll'}^R = & \oint d\Omega \int d\nu \left[ U_{l'l} + V_{l'l} I_{\Omega\nu}^{eff} - \left( \sum_{l''} \chi_{l''l}^\dagger \right) \Psi_{\Omega\nu}^* \left( \sum_{l'''} U_{l'l'''} \right) \right. \\ & \left. - \delta_{l'l} \left( \sum_{l''} U_{l'l''} \right) - \delta_{l'l} \left( \sum_{l''} V_{l'l''} \right) I_{\Omega\nu}^{eff} \right] \end{aligned} \quad (6.19)$$

et

$$I_{\Omega\nu}^{eff} = \Psi_{\Omega\nu} [\eta_{\Omega\nu}^\dagger] - \Psi_{\Omega\nu}^* [\eta_{\Omega\nu}^\dagger] + \Psi_{\Omega\nu}^* [\eta_c]. \quad (6.20)$$

Le schéma itératif GSM/SOR reste le même que celui vu dans le cas de l'hydrogène, si ce n'est que l'on calcule l'opérateur  $\Psi^*$  au pas courant et non plus l'opérateur  $\Lambda^*$ , à l'aide de la méthode des caractéristiques courtes. On traite comme une seule transition radiative les multiplets.

## 6.2.2 Résultats préliminaires

Dans un premier temps, afin de valider les résultats obtenus avec mon code radiatif 2D pour l'atome d'hélium, je les ai comparés avec ceux de LG01. J'ai utilisé mon modèle Hen4 puisque ces derniers auteurs ne considèrent pas de structure fine dans leur modèle atomique. De plus leur code radiatif est 1D plan parallèle donc il ne peut pas prendre en compte le rayonnement coronal sur le dessus de la couche, ni les effets de dilution avec l'altitude. Cependant, leur modèle atomique comporte 29 niveaux d'énergie (jusqu'à  $n = 5$ ) pour He I, 4 niveaux d'énergie pour He II et un seul niveau d'énergie pour He III, et ils considèrent la PRD pour les raies de résonance He I  $\lambda 584 \text{ \AA}$  et He I  $\lambda 304 \text{ \AA}$ .

Pour ces comparaisons, la protubérance modélisée a pour largeur  $D_y = 1000 \text{ km}$  et pour extension verticale  $D_z = 100000 \text{ km}$ , sa température peut varier  $T = 6000, 10000, 14000, 17000$  et  $20000 \text{ K}$  et sa pression gazeuse peut prendre deux valeurs  $p_g = 0.02$  et  $0.2 \text{ dyn cm}^{-2}$ . La vitesse de microturbulence est  $\xi = 5 \text{ km s}^{-1}$ . L'altitude du bas de la couche est  $H_0 = 10000 \text{ km}$ . J'ai choisi une grille spatiale logarithmique de  $123 \times 123$  points.

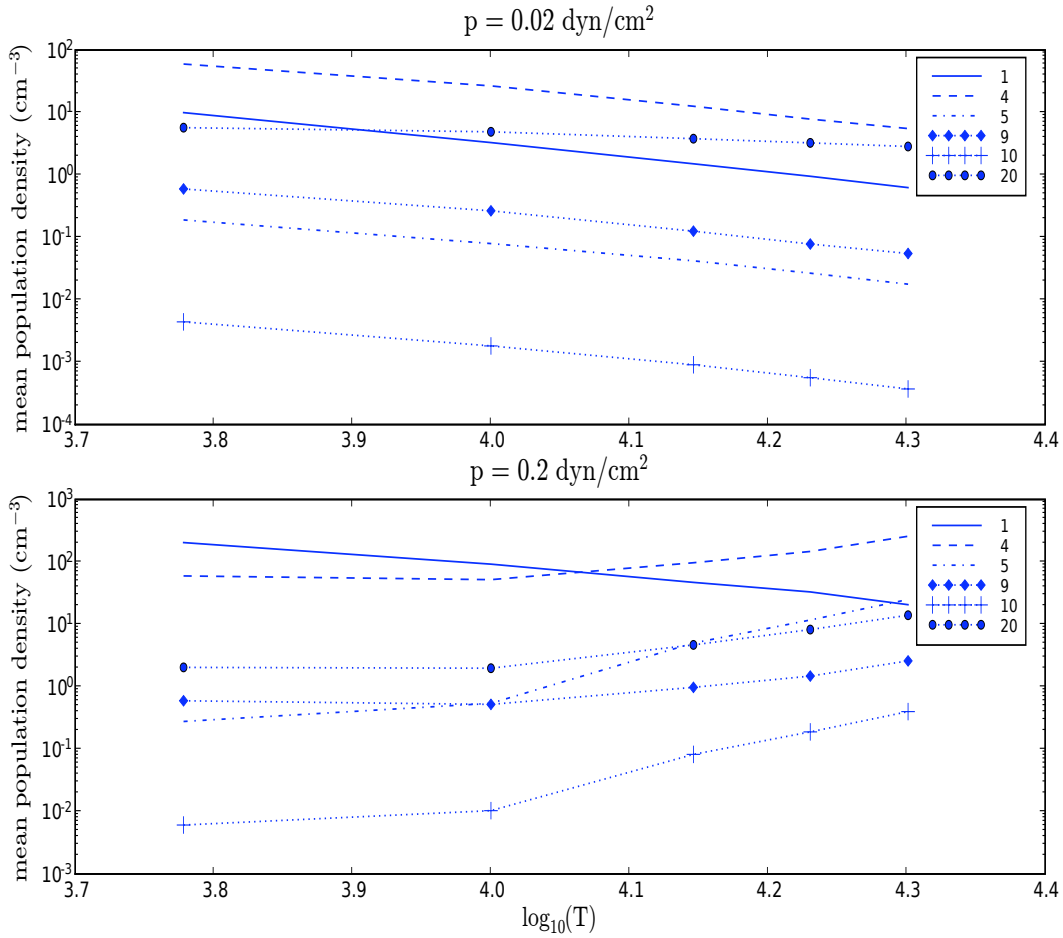


Fig. 6.14: Densités de population moyenne (en  $\text{cm}^{-3}$ ) définies dans le texte en fonction de la température pour deux pressions différentes :  $p_g = 0.02$  et  $0.2 \text{ dyn cm}^{-2}$ . Les chiffres indiquent le niveau considéré : les densités de population pour les niveaux fondamentaux de He I (1) et He II (20) sont divisés par  $10^8$ .

Sur la Fig. (6.14), on montre l'influence de la température sur les densités de population moyenne calculées selon

$$N_i = \frac{\int_0^{D_y} n_i(y, D_z/2) dy}{D_y},$$

où  $n_i(y, D_z/2)$  est la population du niveau  $i$  à la position  $y$  et au centre de la couche ( $z = D_z/2$ ). On s'est intéressé aux populations de 5 niveaux atomiques de He I :  $1s^2$ ,  $2^3P$ ,  $2^1P$ ,  $3^3D$ ,  $3^1D$  notés 1, 4, 5, 9 et 10, et au fondamental de He II noté 20. Pour la clarté de la figure, on a divisé la population moyenne des niveaux fondamentaux de He I et He II par  $10^{-8}$ .

A faible pression ( $p = 0.02 \text{ dyn cm}^{-2}$ ), une augmentation de température diminue la population moyenne en hélium neutre tandis que la population moyenne en hélium ionisé diminue très légèrement. On peut remarquer que pour une température supérieure à

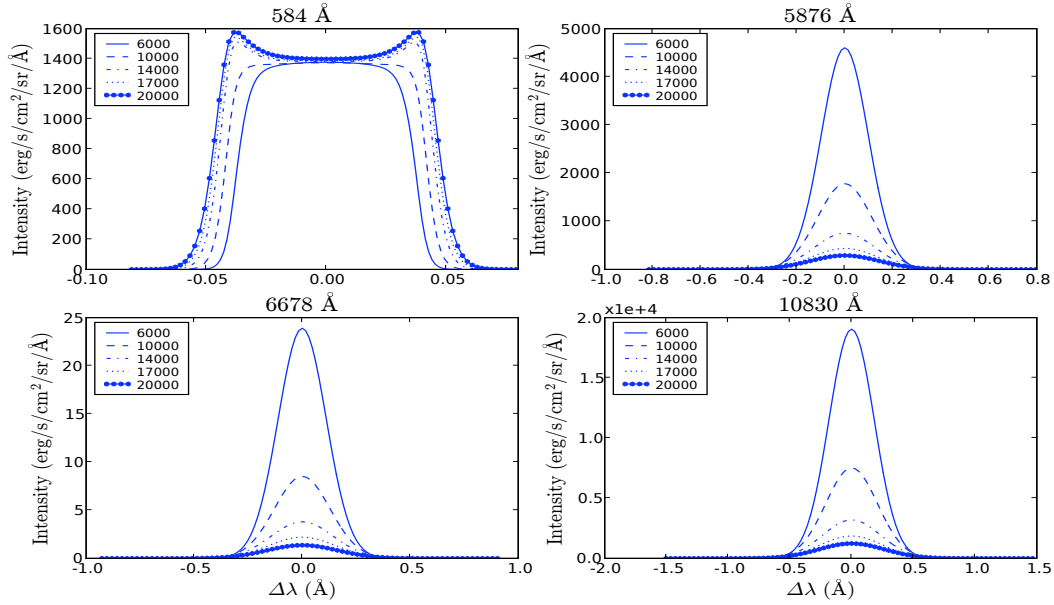


Fig. 6.15: Intensité émergente en  $\text{erg/s/cm}^2/\text{sr}/\text{\AA}$  pour les raies 584  $\text{\AA}$ , 5876  $\text{\AA}$ , 6678  $\text{\AA}$  et 10830  $\text{\AA}$  pour une pression  $p = 0.02 \text{ dyn cm}^{-2}$ , pour 5 températures différentes et pour une extension verticale  $D_z = 100\,000 \text{ km}$ .

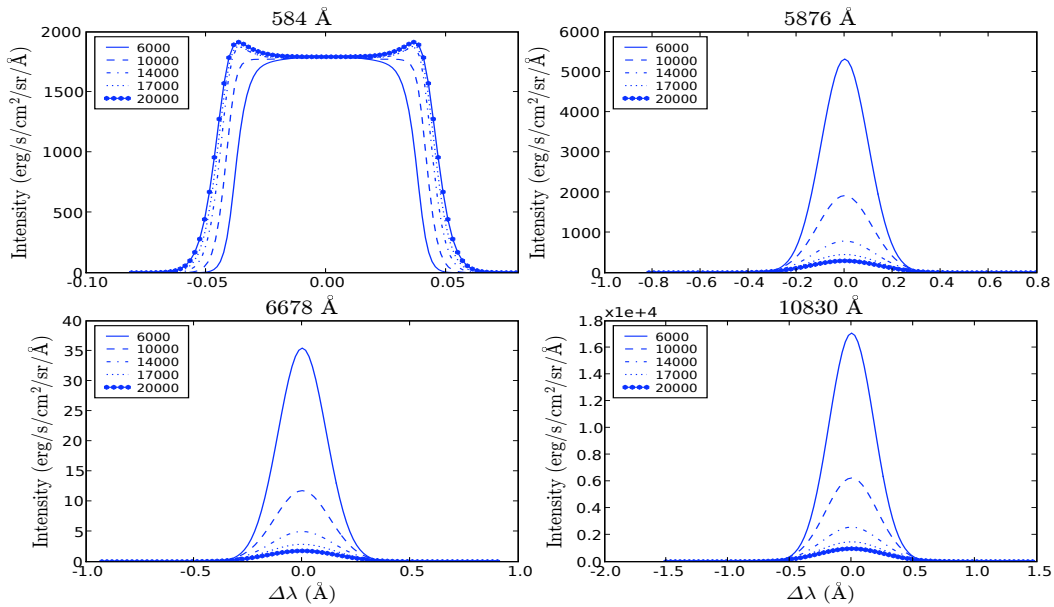


Fig. 6.16: Intensité émergente en  $\text{erg/s/cm}^2/\text{sr}/\text{\AA}$  pour les raies 584  $\text{\AA}$ , 5876  $\text{\AA}$ , 6678  $\text{\AA}$  et 10830  $\text{\AA}$  pour une pression  $p = 0.02 \text{ dyn cm}^{-2}$ , pour 5 températures différentes et pour une extension verticale  $D_z = 10\,000 \text{ km}$ .

environ 8 000 K, la population moyenne en hélium ionisé devient plus importante que celle en hélium neutre. La faible épaisseur optique du continu de Lyman de l'hydrogène



et du continu de l'hélium favorise la pénétration du rayonnement ionisant EUV. Comme dans le même temps, les taux de recombinaison sont faibles, on obtient une ionisation élevée de l'hélium (LG01).

Le comportement général est identique à celui que l'on peut voir sur la Fig. (7) de LG01. Toutefois, leur température de transition est plus élevée et vaut 11 000 K. Ceci est dû à une ionisation plus importante pour les températures inférieures à 8 000 K, comme le montre la densité de population 20 sur la Fig. (6.14). Ceci peut s'expliquer par les effets de PRD que je ne prends pas en compte, car les modèles de LG01 en CRD donnent les mêmes résultats que les miens (communication privée).

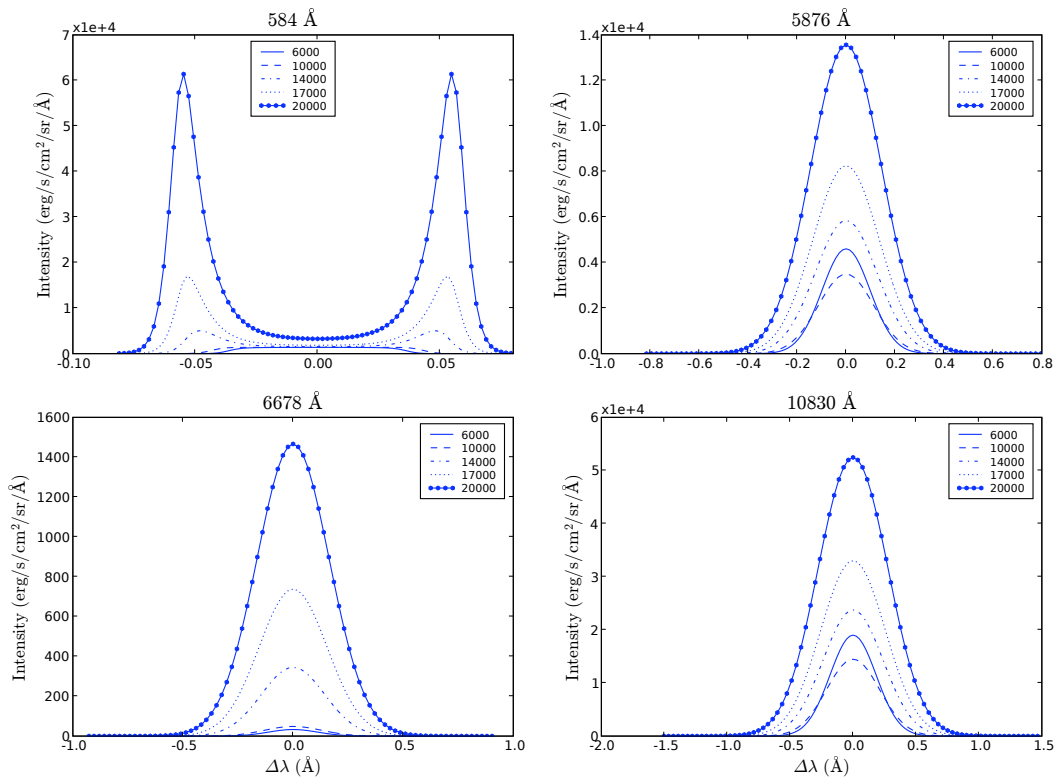


Fig. 6.17: Intensité émergente en  $\text{erg/s/cm}^2/\text{sr}/\text{\AA}$  pour les raies 584  $\text{\AA}$ , 5876  $\text{\AA}$ , 6678  $\text{\AA}$  et 10830  $\text{\AA}$  pour une pression  $p = 0.2 \text{ dyn cm}^{-2}$ , pour 5 températures différentes et pour une extension verticale  $D_z = 100\,000 \text{ km}$ .

Sur la Fig. (6.15), on a tracé les intensités émergentes pour les raies à 584  $\text{\AA}$ , 5876  $\text{\AA}$ , 6678  $\text{\AA}$  et 10830  $\text{\AA}$ , pour une extension verticale  $D_z = 100\,000 \text{ km}$ . Ces intensités sont prises au centre de la couche à la position  $D_z/2$  pour la protubérance vue au limbe sous un angle nul. Le profil de la raie à 584  $\text{\AA}$  montre une augmentation de l'émission thermique dans les ailes avec la température. Cette raie optiquement épaisse est saturée *au centre* et diffuse le rayonnement. Pour les trois autres raies qui sont optiquement minces, l'augmentation de température, qui diminue la profondeur optique de ces raies,

conduit à une diminution de la diffusion et donc des intensités émergentes. On retrouve le même comportement général que celui de la Fig. (8) de LG01. Sur la Fig. (6.16), on a tracé les intensités émergentes des mêmes raies, pour une extension verticale  $D_z = 10\,000$  km. Les intensités sont plus importantes, avec des différences relatives allant de 15 à 40%, que pour l'extension verticale  $D_z = 100\,000$  km. Ceci montre des effets significatifs de géométrie 2D quand on diminue l'extension verticale de la couche, et la manière dont ils modifient les amplitudes des profils émergents. De tels effets ont été d'abord mis en évidence sur la raie  $H\alpha$  par Paletou ([106]).

A haute pression ( $p = 0.2 \text{ dyn cm}^{-2}$ ), la Fig. (6.14) montre que toutes les populations moyennes augmentent avec la température, sauf celles du niveau fondamental de He I. Mais par rapport au cas à basse pression, l'ionisation de l'hélium est moins importante à cause de l'épaisseur optique du continu de l'hélium qui empêche le rayonnement incident d'atteindre le cœur de la couche. De plus, les taux de recombinaison sont plus importants avec une pression plus grande (LG01).

la Fig. (6.17) montre que toutes les intensités émergentes augmentent avec la température. Un pic apparaît à  $0.05 \text{ \AA}$  du centre de la raie à  $584 \text{ \AA}$  au-dessus de  $14\,000 \text{ K}$  et s'intensifie avec la température. Ceci est dû à l'importance de l'excitation collisionnelle. Les raies optiquement minces sont principalement affectées par les processus thermiques qui augmentent l'intensité de la raie avec la température. On retrouve à nouveau le même comportement général que celui de la Fig. (8) de LG01.

Dans tous les deux cas,  $p = 0.02$  et  $p = 0.2 \text{ dyn cm}^{-2}$ , les valeurs des intensités ne sont pas directement comparables entre mes figures et celles de LG01. La PRD, prise en compte par ces auteurs, joue un rôle important dans la forme de la raie à  $584 \text{ \AA}$  et dans le peuplement des niveaux 1 et 5 de He I. Ce qui influe sur la raie à  $6678 \text{ \AA}$  puisque son niveau bas est le niveau 5, et sur l'ionisation via le continu à  $504 \text{ \AA}$ . Le peuplement du niveau fondamental de He II est différent car LG01 considèrent des niveaux supplémentaires qui dépeuplent ce niveau, par rapport à mon modèle. Or, comme le peuplement des niveaux triplets se fait par recombinaison à partir du niveau fondamental de He II, j'obtiens une intensité émergente pour le multiplet  $D_3$  plus importante que celle de LG01.

Sur les Figs. (6.18)-(6.19), on a représenté les corrélations entre les intensités intégrées de différentes raies. L'intégration est faite en fréquence pour l'intensité émergente au centre de la couche en  $D_z/2$  pour une protubérance vue au limbe sous un angle nul.

Sur la Fig. (6.18), on présente la relation linéaire entre les deux multiplets à  $10830 \text{ \AA}$  et  $D_3$ . Cette linéarité n'est valable que dans le domaine de conditions physiques pour lesquelles les deux multiplets sont optiquement minces. Lorsque le multiplet à  $10830 \text{ \AA}$  devient épais, le rapport  $E(10830)/E(D_3)$  diminue et la linéarité disparaît. Or, comme on le verra dans le chapitre suivant, les observations montrent clairement des domaines où ces deux raies sont optiquement épaisses (Landi Degl'Innocenti [76], López Ariste & Casini [90]). L'étude de la corrélation peut donc être un outil de diagnostic de l'épaisseur optique de ces raies.

On retrouve la même linéarité sur la Fig. (6.19), et de manière générale pour toutes les

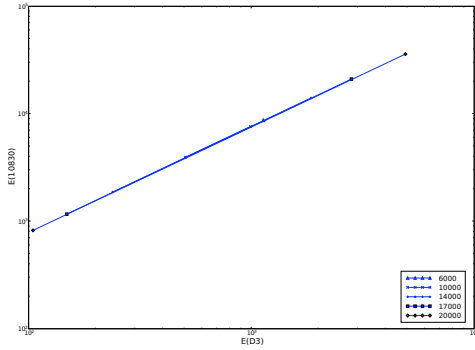


Fig. 6.18: Intensités intégrées :  $E(10830)$  en fonction de  $E(D_3)$  pour 8 températures et 2 pressions.

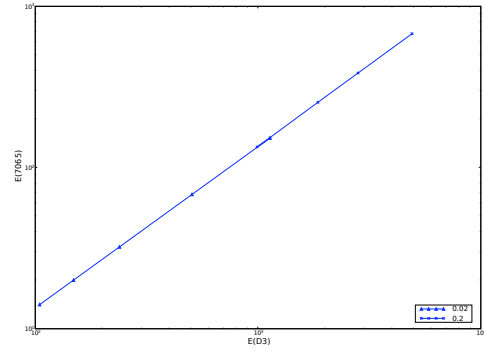


Fig. 6.19: Intensités intégrées :  $E(7065)$  en fonction de  $E(D_3)$  pour 8 températures et 2 pressions.

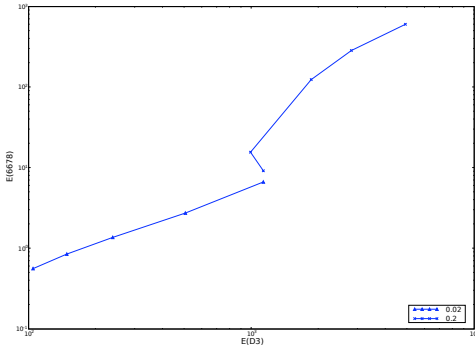


Fig. 6.20: Intensités intégrées :  $E(6678)$  en fonction de  $E(D_3)$  pour 8 températures.

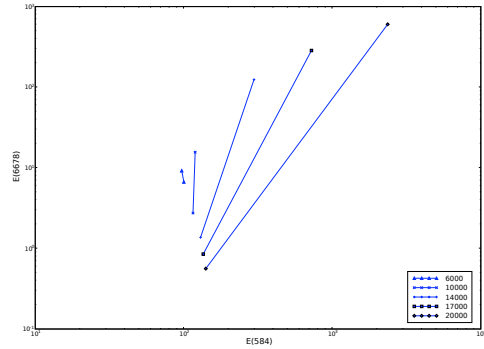


Fig. 6.21: Intensités intégrées :  $E(6678)$  en fonction de  $E(584)$  pour 2 pressions.

raies des triplets lorsqu'elles sont optiquement minces. La seule différence d'une paire de raies à l'autre concerne la pente de la droite, donc le rapport entre les intensités intégrées. Cela provient du terme de diffusion qui est prépondérant sur le terme collisionnel dans la fonction source des raies des triplets. Ainsi les rapports dépendent principalement du rapport des intensités incidentes (Heasley & Milkey [56], LG01).

Sur la Fig. (6.21), je présente la corrélation entre la raie optiquement mince à 6678 Å et la raie de résonance optiquement épaisse à 584 Å. Ces deux raies ont en commun le niveau  $5\ 2^1P$  qui est le niveau inférieur de la raie à 6678 Å. On peut voir qu'à faible température la raie à 584 Å est presque totalement saturée alors que les variations de pression diminuent l'intensité de 6678 Å. Pour une température donnée, le rapport augmente avec la pression, particulièrement lorsque la température est élevée. L'excitation collisionnelle joue alors un rôle majeur dans l'émission dans les ailes de 584 Å (LG01).

Sur la Fig. (6.20), je présente la corrélation entre la raie singulet à 6678 Å et la raie triplet  $D_3$  en fonction de la pression. Le rapport  $E(6678)/E(D_3)$  augmente avec l'épaisseur optique de la raie à 584 Å (Heasley & Milkey [56]). Je retrouve également le comportement noté par LG01. A faible pression ( $p = 0.02\ \text{dyn cm}^{-2}$ ), la relation entre les deux raies est

quasiment linéaire. Si on augmente la pression, on note un rapport limite obtenu pour la température la plus faible.

Enfin sur la Fig. (6.22), on a tracé les cartes 2D des populations de plusieurs niveaux de l'hélium (1, 2, 4, 5, 6, 9, 10, 20) pour le même modèle de protubérance que celui qui sert de benchmark pour l'hydrogène, une couche de  $243 \times 243$  points avec  $D_y = 5\,000$  km et  $D_z = 30\,000$  km pour  $T = 8\,000$  K et  $p_g = 0.05 \text{ dyn cm}^{-2}$ . Elles montrent les écarts à l'ETL et les effets de géométrie à l'intérieur de la couche, ainsi que l'importance du rayonnement coronal dans l'ionisation et la recombinaison qui peuple par cascade les niveaux triplets. A titre de référence, pour détailler l'information contenue dans ces figures, je fournis les Tab. (6.5) et (6.6) de la distribution correspondante des populations à l'intérieur de la couche.

J'ai désormais validé mon code radiatif 2D pour résoudre le problème du transfert de rayonnement dans une protubérance. Dans le chapitre suivant, je vais utiliser ce code pour synthétiser les profils des multiplets  $D_3$  et  $10830 \text{ \AA}$  et les comparer aux profils observés avec le télescope THÉMIS installé sur l'île de Ténérife aux Canaries. Je vais également prendre en compte la structure filamentaire des protubérances dans mon modèle de couche 2D afin d'améliorer les profils synthétisés avec mon code radiatif 2D..

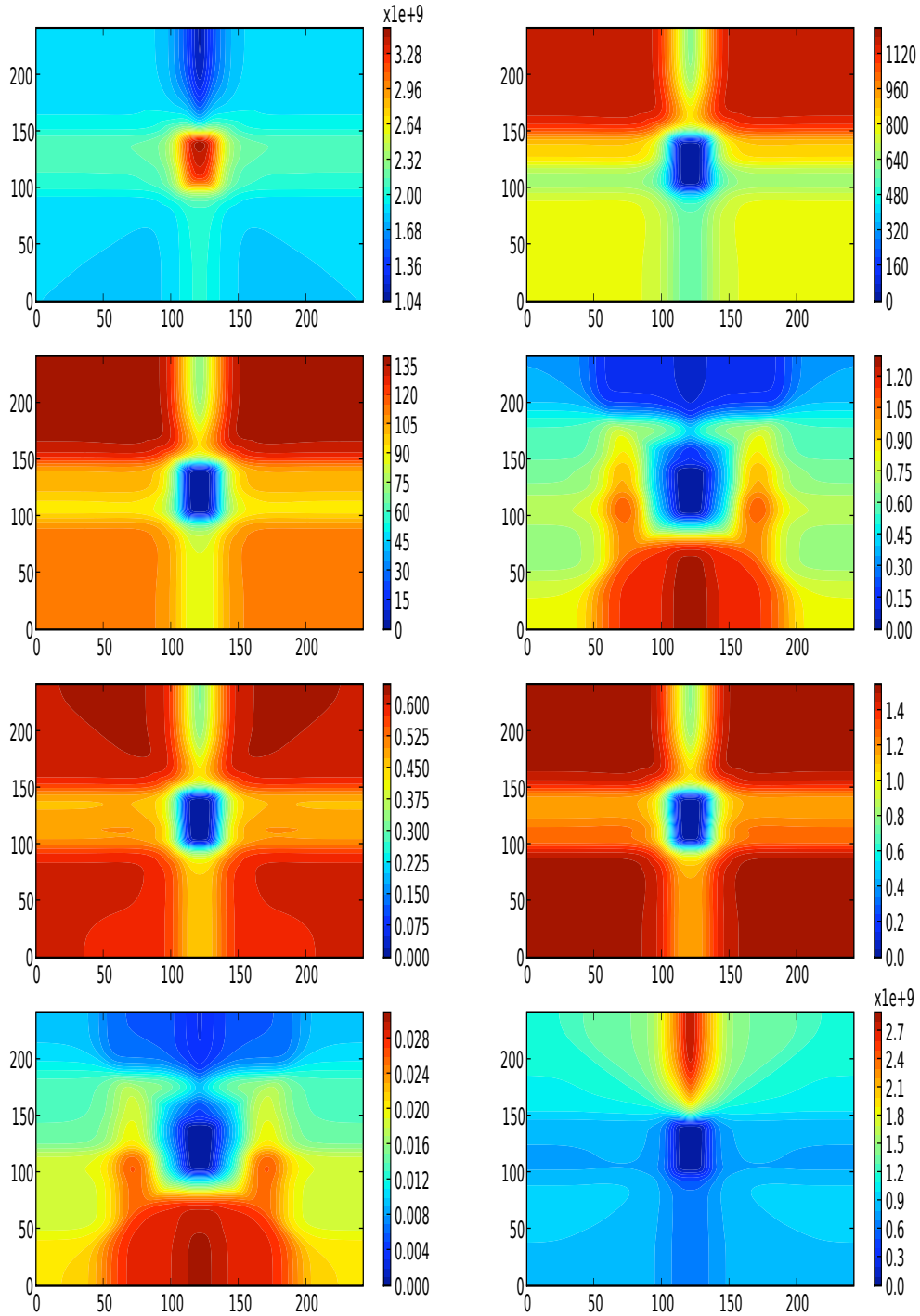


Fig. 6.22: Cartes 2D des populations des niveaux 1, 2, 4, 5, 6, 9, 10, 20 de l'hélium pour une couche de  $243 \times 243$  points avec  $D_y = 5\,000$  km et  $D_z = 30\,000$  km ; la température vaut  $T = 8\,000$  K et la pression gazeuse vaut  $p_g = 0.05$  dyn cm $^{-2}$ .

z-position	y-position							
	$10^{-4}$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	1	10	100	2500
$10^{-4}$	1.903E+09	1.902E+09	1.894E+09	1.876E+09	1.865E+09	1.856E+09	1.768E+09	1.326E+09
$10^{-3}$	1.903E+09	1.903E+09	1.896E+09	1.877E+09	1.865E+09	1.856E+09	1.769E+09	1.328E+09
$10^{-2}$	1.905E+09	1.905E+09	1.902E+09	1.883E+09	1.868E+09	1.857E+09	1.771E+09	1.338E+09
$10^{-1}$	1.906E+09	1.906E+09	1.906E+09	1.900E+09	1.880E+09	1.864E+09	1.784E+09	1.384E+09
1	1.906E+09	1.906E+09	1.906E+09	1.905E+09	1.901E+09	1.881E+09	1.822E+09	1.510E+09
10	1.913E+09	1.913E+09	1.913E+09	1.912E+09	1.912E+09	1.918E+09	1.903E+09	1.737E+09
100	1.974E+09	1.974E+09	1.974E+09	1.974E+09	1.974E+09	1.987E+09	2.108E+09	2.254E+09
1000	2.150E+09	2.150E+09	2.150E+09	2.151E+09	2.154E+09	2.173E+09	2.354E+09	3.338E+09
10000	2.130E+09	2.130E+09	2.130E+09	2.131E+09	2.134E+09	2.152E+09	2.326E+09	3.267E+09
15000	2.115E+09	2.115E+09	2.115E+09	2.116E+09	2.119E+09	2.137E+09	2.308E+09	3.242E+09
20000	2.098E+09	2.098E+09	2.098E+09	2.099E+09	2.102E+09	2.120E+09	2.287E+09	3.214E+09
29000	2.043E+09	2.043E+09	2.043E+09	2.044E+09	2.045E+09	2.060E+09	2.198E+09	2.904E+09
29900	1.885E+09	1.885E+09	1.885E+09	1.885E+09	1.885E+09	1.890E+09	1.957E+09	2.129E+09
29990	1.854E+09	1.854E+09	1.854E+09	1.854E+09	1.852E+09	1.851E+09	1.874E+09	2.018E+09
29999	1.850E+09	1.850E+09	1.850E+09	1.849E+09	1.841E+09	1.834E+09	1.860E+09	2.001E+09
29999.9	1.847E+09	1.847E+09	1.845E+09	1.839E+09	1.829E+09	1.828E+09	1.856E+09	1.996E+09
29999.99	1.842E+09	1.842E+09	1.840E+09	1.830E+09	1.826E+09	1.827E+09	1.854E+09	1.994E+09
29999.999	1.840E+09	1.840E+09	1.836E+09	1.829E+09	1.825E+09	1.826E+09	1.854E+09	1.994E+09
29999.9999	1.840E+09	1.840E+09	1.835E+09	1.829E+09	1.825E+09	1.826E+09	1.854E+09	1.994E+09

z-position	y-position							
	$10^{-4}$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	1	10	100	2500
$10^{-4}$	1.189E+03	1.190E+03	1.195E+03	1.199E+03	1.198E+03	1.193E+03	1.122E+03	744.
$10^{-3}$	1.188E+03	1.189E+03	1.195E+03	1.199E+03	1.198E+03	1.193E+03	1.122E+03	745.
$10^{-2}$	1.185E+03	1.186E+03	1.190E+03	1.199E+03	1.198E+03	1.193E+03	1.123E+03	750.
$10^{-1}$	1.181E+03	1.182E+03	1.183E+03	1.191E+03	1.198E+03	1.194E+03	1.129E+03	773.
1	1.180E+03	1.180E+03	1.181E+03	1.184E+03	1.192E+03	1.195E+03	1.142E+03	834.
10	1.172E+03	1.172E+03	1.172E+03	1.174E+03	1.178E+03	1.174E+03	1.142E+03	903.
100	1.096E+03	1.096E+03	1.096E+03	1.098E+03	1.101E+03	1.093E+03	983.	761.
1000	880.	880.	880.	882.	884.	872.	720.	46.8
10000	805.	805.	805.	807.	809.	797.	660.	34.9
15000	766.	766.	766.	767.	769.	758.	630.	35.0
20000	724.	724.	725.	726.	728.	718.	599.	35.1
29000	666.	666.	666.	667.	669.	659.	559.	81.1
29900	764.	764.	764.	765.	766.	758.	692.	519.
29990	781.	781.	781.	782.	781.	771.	730.	585.
29999	783.	783.	783.	782.	777.	769.	732.	591.
29999.9	781.	781.	780.	776.	771.	766.	730.	591.
29999.99	778.	778.	776.	770.	769.	765.	730.	590.
29999.999	777.	776.	773.	769.	768.	765.	729.	590.
29999.9999	776.	776.	773.	769.	768.	765.	729.	590.

z-position	y-position							
	$10^{-4}$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	1	10	100	2500
$10^{-4}$	138.	138.	138.	139.	139.	138.	129.	84.9
$10^{-3}$	137.	138.	138.	139.	139.	138.	129.	85.0
$10^{-2}$	137.	137.	138.	139.	139.	138.	130.	85.6
$10^{-1}$	137.	137.	137.	138.	139.	138.	130.	88.2
1	137.	137.	137.	137.	138.	138.	132.	95.1
10	136.	136.	136.	136.	136.	136.	132.	103.
100	127.	127.	128.	128.	128.	127.	115.	87.8
1000	105.	105.	105.	105.	105.	103.	85.5	5.58
10000	101.	101.	101.	101.	101.	100.	82.8	4.38
15000	99.2	99.2	99.2	99.4	99.7	98.3	81.7	4.53
20000	97.2	97.2	97.3	97.4	97.7	96.3	80.4	4.71
29000	94.8	94.8	94.8	95.0	95.2	93.9	79.6	11.5
29900	111.	111.	111.	111.	111.	110.	100.	75.9
29990	114.	114.	114.	114.	114.	112.	106.	86.0
29999	114.	114.	114.	114.	113.	112.	107.	86.9
29999.9	114.	114.	114.	113.	112.	111.	106.	86.9
29999.99	113.	113.	113.	112.	112.	111.	106.	86.8
29999.999	113.	113.	112.	112.	112.	111.	106.	86.8
29999.9999	113.	113.	112.	112.	112.	111.	106.	86.8

z-position	y-position							
	$10^{-4}$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	1	10	100	2500
$10^{-4}$	0.350	0.348	0.335	0.249	0.136	0.130	0.121	8.556E-02
$10^{-3}$	0.350	0.350	0.336	0.250	0.136	0.131	0.122	8.599E-02
$10^{-2}$	0.357	0.357	0.350	0.262	0.144	0.138	0.128	9.008E-02
$10^{-1}$	0.404	0.404	0.399	0.356	0.212	0.204	0.188	0.127
1	0.518	0.518	0.519	0.529	0.563	0.540	0.502	0.361
10	0.564	0.564	0.568	0.599	0.762	0.724	0.585	0.429
100	0.585	0.585	0.589	0.623	0.801	0.795	0.406	0.196
1000	0.639	0.640	0.644	0.685	0.884	0.850	0.365	2.069E-02
10000	0.667	0.668	0.673	0.715	0.922	0.892	0.384	1.810E-02
15000	0.684	0.685	0.689	0.733	0.945	0.916	0.394	1.944E-02
20000	0.703	0.703	0.708	0.752	0.970	0.944	0.405	2.107E-02
29000	0.737	0.738	0.743	0.788	1.02	1.01	0.472	6.751E-02
29900	0.688	0.688	0.693	0.733	0.942	0.992	0.689	0.614
29990	0.679	0.679	0.683	0.722	0.929	1.04	1.11	1.17
29999	0.685	0.685	0.690	0.731	0.962	1.14	1.18	1.26
29999.9	0.757	0.757	0.764	0.828	1.09	1.16	1.19	1.28
29999.99	0.802	0.802	0.809	0.914	1.12	1.17	1.19	1.28
29999.999	0.808	0.808	0.821	0.924	1.12	1.17	1.19	1.28
29999.9999	0.808	0.809	0.822	0.925	1.12	1.17	1.19	1.28

Tab. 6.5: Populations des premier, deuxième, quatrième et cinquième niveaux pour le modèle de HeI sans structure fine, avec  $T = 8000$  K et  $p_g = 0.05 \text{ dyn cm}^{-2}$  pour une grille 2D de 243x243 points avec  $D_y = 5000$  km et  $D_z = 30000$  km.

z-position	y-position								
	$10^{-4}$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	1	10	100	1000	2500
$10^{-4}$	0.624	0.624	0.627	0.629	0.628	0.625	0.587	0.385	0.323
$10^{-3}$	0.624	0.624	0.627	0.629	0.628	0.625	0.587	0.385	0.323
$10^{-2}$	0.622	0.622	0.624	0.629	0.628	0.626	0.588	0.388	0.326
$10^{-1}$	0.620	0.620	0.621	0.625	0.628	0.626	0.590	0.400	0.339
1	0.620	0.620	0.620	0.622	0.625	0.627	0.598	0.432	0.374
10	0.616	0.616	0.616	0.617	0.619	0.617	0.598	0.468	0.422
100	0.579	0.579	0.579	0.580	0.581	0.577	0.520	0.398	0.375
1000	0.476	0.476	0.476	0.477	0.478	0.471	0.389	2.535E-02	1.181E-02
10000	0.482	0.482	0.482	0.483	0.484	0.477	0.395	2.087E-02	3.238E-04
15000	0.487	0.487	0.487	0.488	0.489	0.482	0.401	2.223E-02	3.581E-04
20000	0.493	0.493	0.493	0.494	0.495	0.488	0.407	2.385E-02	4.009E-04
29000	0.506	0.506	0.506	0.507	0.508	0.501	0.425	6.183E-02	4.403E-02
29900	0.593	0.593	0.593	0.593	0.594	0.587	0.536	0.406	0.396
29990	0.608	0.608	0.608	0.608	0.608	0.600	0.569	0.460	0.451
29999	0.609	0.609	0.609	0.608	0.605	0.598	0.570	0.465	0.456
29999.9	0.608	0.608	0.607	0.604	0.600	0.596	0.569	0.464	0.456
29999.99	0.606	0.606	0.604	0.599	0.598	0.595	0.569	0.464	0.456
29999.999	0.605	0.604	0.602	0.598	0.598	0.595	0.569	0.464	0.456
29999.9999	0.604	0.604	0.602	0.598	0.598	0.595	0.569	0.464	0.456

z-position	y-position								
	$10^{-4}$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	1	10	100	1000	2500
$10^{-4}$	1.53	1.53	1.54	1.55	1.54	1.54	1.44	0.944	0.791
$10^{-3}$	1.53	1.53	1.54	1.55	1.54	1.54	1.44	0.945	0.792
$10^{-2}$	1.53	1.53	1.53	1.54	1.54	1.54	1.44	0.951	0.799
$10^{-1}$	1.52	1.52	1.53	1.54	1.54	1.54	1.45	0.981	0.831
1	1.52	1.52	1.52	1.53	1.54	1.54	1.47	1.06	0.917
10	1.51	1.51	1.51	1.51	1.52	1.51	1.47	1.15	1.03
100	1.42	1.42	1.42	1.42	1.43	1.42	1.28	0.978	0.921
1000	1.17	1.17	1.17	1.18	1.18	1.16	0.960	6.256E-02	2.912E-02
10000	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.18	0.981	5.185E-02	8.044E-04
15000	1.21	1.21	1.22	1.22	1.22	1.20	1.00	5.545E-02	8.931E-04
20000	1.23	1.23	1.24	1.24	1.24	1.22	1.02	5.976E-02	1.005E-03
29000	1.28	1.28	1.28	1.28	1.28	1.26	1.07	0.156	0.111
29900	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50	1.49	1.36	1.03	1.00
29990	1.54	1.54	1.54	1.54	1.54	1.52	1.44	1.17	1.15
29999	1.54	1.54	1.54	1.54	1.53	1.52	1.45	1.18	1.16
29999.9	1.54	1.54	1.54	1.53	1.52	1.51	1.44	1.18	1.16
29999.99	1.53	1.53	1.53	1.52	1.52	1.51	1.44	1.18	1.16
29999.999	1.53	1.53	1.53	1.52	1.52	1.51	1.44	1.18	1.16
29999.9999	1.53	1.53	1.52	1.52	1.52	1.51	1.44	1.18	1.16

z-position	y-position								
	$10^{-4}$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	1	10	100	1000	2500
$10^{-4}$	9.853E-03	9.828E-03	9.588E-03	8.064E-03	6.055E-03	5.913E-03	5.428E-03	3.554E-03	2.933E-03
$10^{-3}$	9.867E-03	9.854E-03	9.616E-03	8.086E-03	6.069E-03	5.926E-03	5.440E-03	3.564E-03	2.941E-03
$10^{-2}$	9.990E-03	9.979E-03	9.862E-03	8.296E-03	6.205E-03	6.053E-03	5.558E-03	3.650E-03	3.011E-03
$10^{-1}$	1.081E-02	1.080E-02	1.072E-02	9.961E-03	7.411E-03	7.208E-03	6.616E-03	4.361E-03	3.555E-03
1	1.278E-02	1.279E-02	1.281E-02	1.299E-02	1.356E-02	1.309E-02	1.215E-02	8.607E-03	6.995E-03
10	1.358E-02	1.359E-02	1.365E-02	1.420E-02	1.703E-02	1.632E-02	1.367E-02	1.004E-02	8.672E-03
100	1.374E-02	1.375E-02	1.381E-02	1.442E-02	1.751E-02	1.735E-02	1.016E-02	5.645E-03	4.804E-03
1000	1.413E-02	1.413E-02	1.421E-02	1.493E-02	1.841E-02	1.776E-02	8.711E-03	5.070E-04	2.188E-04
10000	1.531E-02	1.532E-02	1.541E-02	1.619E-02	2.002E-02	1.939E-02	9.458E-03	4.552E-04	6.744E-06
15000	1.608E-02	1.609E-02	1.618E-02	1.701E-02	2.106E-02	2.045E-02	9.928E-03	5.004E-04	7.693E-06
20000	1.698E-02	1.699E-02	1.708E-02	1.796E-02	2.227E-02	2.169E-02	1.048E-02	5.564E-04	8.922E-06
29000	1.868E-02	1.869E-02	1.880E-02	1.975E-02	2.451E-02	2.430E-02	1.254E-02	1.800E-03	1.299E-03
29900	1.827E-02	1.828E-02	1.837E-02	1.921E-02	2.361E-02	2.463E-02	1.791E-02	1.552E-02	1.536E-02
29990	1.818E-02	1.819E-02	1.828E-02	1.910E-02	2.345E-02	2.572E-02	2.697E-02	2.761E-02	2.765E-02
29999	1.834E-02	1.835E-02	1.844E-02	1.930E-02	2.417E-02	2.801E-02	2.852E-02	2.969E-02	2.979E-02
29999.9	1.986E-02	1.987E-02	2.001E-02	2.135E-02	2.688E-02	2.844E-02	2.877E-02	2.999E-02	3.009E-02
29999.99	2.080E-02	2.081E-02	2.096E-02	2.314E-02	2.743E-02	2.856E-02	2.886E-02	3.010E-02	3.020E-02
29999.999	2.092E-02	2.094E-02	2.120E-02	2.335E-02	2.749E-02	2.857E-02	2.888E-02	3.011E-02	3.021E-02
29999.9999	2.094E-02	2.096E-02	2.122E-02	2.337E-02	2.749E-02	2.858E-02	2.888E-02	3.011E-02	3.021E-02

z-position	y-position								
	$10^{-4}$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	1	10	100	1000	2500
$10^{-4}$	1.160E+09	1.168E+09	1.226E+09	1.320E+09	1.370E+09	1.413E+09	1.703E+09	2.515E+09	2.799E+09
$10^{-3}$	1.155E+09	1.160E+09	1.218E+09	1.317E+09	1.369E+09	1.413E+09	1.703E+09	2.514E+09	2.797E+09
$10^{-2}$	1.134E+09	1.137E+09	1.168E+09	1.288E+09	1.358E+09	1.408E+09	1.697E+09	2.500E+09	2.783E+09
$10^{-1}$	1.109E+09	1.110E+09	1.120E+09	1.184E+09	1.309E+09	1.386E+09	1.669E+09	2.437E+09	2.721E+09
1	1.100E+09	1.100E+09	1.103E+09	1.122E+09	1.188E+09	1.316E+09	1.583E+09	2.262E+09	2.545E+09
10	1.085E+09	1.085E+09	1.087E+09	1.097E+09	1.117E+09	1.169E+09	1.395E+09	1.938E+09	2.207E+09
100	9.993E+08	9.994E+08	1.000E+09	1.008E+09	1.019E+09	1.035E+09	1.034E+09	1.289E+09	1.493E+09
1000	8.105E+08	8.106E+08	8.113E+08	8.170E+08	8.250E+08	8.271E+08	7.387E+08	6.674E+07	3.729E+07
10000	7.993E+08	7.993E+08	8.000E+08	8.052E+08	8.125E+08	8.125E+08	7.184E+08	4.945E+07	8.493E+05
15000	7.966E+08	7.966E+08	7.972E+08	8.025E+08	8.097E+08	8.097E+08	7.161E+08	5.134E+07	9.147E+05
20000	7.939E+08	7.939E+08	7.945E+08	7.993E+08	8.067E+08	8.068E+08	7.138E+08	5.358E+07	9.953E+05
29000	7.971E+08	7.972E+08	7.976E+08	8.013E+08	8.062E+08	7.995E+08	6.974E+08	1.112E+08	7.850E+07
29900	9.030E+08	9.030E+08	9.031E+08	9.053E+08	9.058E+08	8.903E+08	8.013E+08	5.904E+08	5.743E+08
29990	9.151E+08	9.151E+08	9.150E+08	9.154E+08	9.099E+08	8.785E+08	8.074E+08	6.430E+08	6.299E+08
29999	9.138E+08	9.137E+08	9.127E+08	9.081E+08	8.844E+08	8.523E+08	7.983E+08	6.428E+08	6.304E+08
29999.9	9.036E+08	9.031E+08	8.993E+08	8.787E+08	8.521E+08	8.398E+08	7.910E+08	6.383E+08	6.262E+08
29999.99	8.888E+08	8.878E+08	8.793E+08	8.520E+08	8.430E+08	8.352E+08	7.878E+08	6.361E+08	6.241E+08
29999.999	8.821E+08	8.810E+08	8.675E+08	8.480E+08	8.418E+08	8.346E+08	7.875E+08	6.359E+08	6.239E+08
29999.9999	8.811E+08	8.791E+08	8.662E+08	8.476E+08	8.417E+08	8.346E+08	7.875E+08	6.359E+08	6.239E+08

Tab. 6.6: Populations des sixième, neuvième et dixième niveaux, et du premier niveau d'ionisation pour le modèle de HeI sans structure fine, avec  $T = 8000$  K et  $p_g = 0.05 \text{ dyn cm}^{-2}$  pour une grille 2D de 243x243 points avec  $D_y = 5000$  km et  $D_z = 30000$  km.



## Modélisation radiative 2D des raies spectrales de He I

---

Comme on l'a déjà mentionné, le champ magnétique joue certainement un rôle prépondérant dans la création et la stabilité des protubérances, ainsi que dans leur disparition. Les multiplets à 10830 Å et  $D_3$  de He I sont parmi les meilleurs outils pour étudier le champ magnétique dans les protubérances. En effet, il existe peu de raies suffisamment "fortes" dans le visible et l'IR proche. Le choix se porte sur l'atome d'hélium dont l'étude est plus simple que l'atome d'hydrogène, et sa structure atomique hyperfine, du point de vue de la polarisation, et aussi plus mince optiquement. Les premières mesures de champ magnétique dans les protubérances, effectuées par J.-C. Leroy, ont été faites sur le multiplet  $D_3$  de He I (Leroy et al. [87], Leroy [81] [82]). L'utilisation des deux composantes du multiplet  $D_3$ , quand elles sont résolues, permet de déterminer *complètement* le champ magnétique d'une protubérance en mesurant simultanément la polarisation linéaire à deux longueurs d'onde différentes (Bommier et al. [24]).

Des observations récentes du multiplet  $D_3$  dans tous les paramètres de Stokes, avec résolution spectrale, faites à l'aide du télescope THÉMIS (Paletou et al. [112]), ont conduit à une révision complète des outils d'inversion du champ magnétique (López Ariste & Casini [90]). En particulier, ces derniers auteurs démontrent comment la prise en compte de *tous* les paramètres de Stokes, et pas seulement les mesures de polarisation linéaire, affecte la fiabilité du processus d'inversion.

De plus, les mesures de rapport entre les pics bleu et rouge de  $D_3$  et 10830 Å (López Ariste & Casini [90]) sont souvent en contradiction avec l'hypothèse, communément admise, d'épaisseur optique mince pour ces raies spectrales (Bommier [20]). On définit  $I_r$  comme le rapport pour un multiplet entre l'intensité du pic le plus large et celle du pic plus petit, c'est-à-dire  $I_{bleu}/I_{rouge}$  pour le multiplet  $D_3$  et  $I_{rouge}/I_{bleu}$  pour le multiplet à 10830 Å. On rappelle ainsi que, lorsque les multiplets à 10830 Å et  $D_3$  deviennent optiquement épais, l'évaluation de  $I_r$  est inférieure à 8 (House & Smartt [66], Landi Degl'Innocenti [76]).

Les modèles radiatifs les plus récents (Labrosse & Gouttebroze [73] [74]) supposent des couches 1D plan parallèle statique et pas de structure fine pour le modèle atomique de l'hélium. Ceci conduit à des profils synthétiques gaussiens qui ne sont pas réalistes.

Pourtant cette structure fine est évidente dans les observations à haute résolution spectrale.

Dans les chapitres précédents, j'ai présenté tous les outils que j'ai développés afin de résoudre le problème du transfert de rayonnement dans les protubérances solaires, le nouveau code radiatif 2D mis en place, la modélisation d'une protubérance, et les modèles atomiques détaillés pour les atomes d'hydrogène et d'hélium, incluant la structure fine pour l'hélium. Je vais maintenant présenter les observations faites avec le télescope THéMIS et les comparer avec les profils des multiplets à 10830 Å et  $D_3$  que mon code radiatif 2D me permet de synthétiser. Mon but est de retrouver, d'une part, des profils non-gaussiens qui sont cohérents avec les observations et, d'autre part, de trouver les régimes pour lesquels  $I_r$  est inférieur à 8.

## 7.1 Les observations à THéMIS

### 7.1.1 Le télescope THéMIS<sup>a</sup>



Fig. 7.1: Le télescope THéMIS au soleil couchant (image prise sur le site <http://www.themis.iac.es/>).

THéMIS est une opération conjointe entre les agences nationales de recherche française, le *Centre National de la Recherche Scientifique* (CNRS), et italienne, le *Consiglio Nazionale delle Ricerche* (CNR). THéMIS est située à Izaña, à 2400 m d'altitude, à l'intérieur de l'Observatoire du Teide de l'*Instituto de Astrofísica de Canarias* (IAC), sur l'île de Ténérife (Archipel des Canaries, Espagne).

THéMIS est un télescope solaire de 90 cm d'ouverture. Sa conception spécifique, permettant la spectropolarimétrie multi-raies haute-résolution de la surface solaire, comporte une monture alt-azimutale, un tube de télescope rempli d'hélium, un polarimètre

<sup>a</sup><http://www.themis.iac.es/>

au foyer primaire et un spectrographe multi-mode (Paletou & Molodij [110]). THÉMIS fournit une analyse polarimétrique dans tous les paramètres de Stokes avec une sensibilité allant de  $10^{-3}$  à  $10^{-5}$  pour certaines configurations<sup>b</sup>. La conception du spectrographe permet l'observation de jusqu'à 10 raies simultanément, permettant de réaliser l'inversion 3D de la structure des champs magnétiques dans l'atmosphère solaire. THÉMIS offre trois modes d'observations complémentaires :

- le mode MTR pour la spectropolarimétrie multi-raies,
- le mode MSDP permettant la spectro-imagerie soustractive multi-canaux,
- le mode IPM pour l'imagerie par bande très fine avec un filtre biréfringent universel suivi d'un interféromètre de Fabry-Pérot.

En particulier, THÉMIS est le seul télescope au monde qui permet de faire de la spectropolarimétrie des multiplets  $D_3$  et 10830 Å de l'hélium *simultanément* depuis 2006.

### 7.1.2 Les profils observés

Les Figs. (7.2) et (7.3) sont les profils des multiplets à 10830 Å et  $D_3$  tels qu'ils sont observés avec le télescope THÉMIS. Les intensités sont normalisées par rapport à la valeur maximale. Les deux pics, dits "bleu" et "rouge", sont parfaitement résolus.

Des statistiques, effectuées sur l'évaluation de  $I_r$  pour le multiplet  $D_3$ , donnent une valeur moyenne de 6 (López Ariste & Casini [90]). Cette valeur n'est pas cohérente avec l'hypothèse que le multiplet  $D_3$  est optiquement mince.

## 7.2 Modélisation des profils

Les profils observés font clairement apparaître la structure fine des deux multiplets  $D_3$  et 10830 Å. Afin d'obtenir des profils synthétiques correspondant à ces observations, je vais utiliser, pour l'atome d'hélium, le modèle Hen3sf qui inclut la structure fine atomique pour les niveaux  $2^3P$ ,  $3^3P$  et  $3^3D$ .

### 7.2.1 Une couche individuelle

Je reprends le modèle de protubérance isotherme, isobare et statique, que j'ai déjà utilisé au chapitre précédent. La couche a pour largeur  $D_y = 5\,000$  km et pour extension verticale  $D_z = 30\,000$  km, sa température est  $T = 8\,000$  K et sa pression gazeuse est  $p_g = 0.05$  dyn cm<sup>-2</sup>. La vitesse de micro-turbulence est  $\xi = 5$  km s<sup>-1</sup>. L'altitude du bas de la couche est  $H_0 = 10\,000$  km. J'ai choisi une grille spatiale logarithmique de 243x243 points.

---

<sup>b</sup>La valeur de  $10^{-5}$  est obtenue en accumulation de poses, c'est-à-dire en dégradant la résolution spectrale.

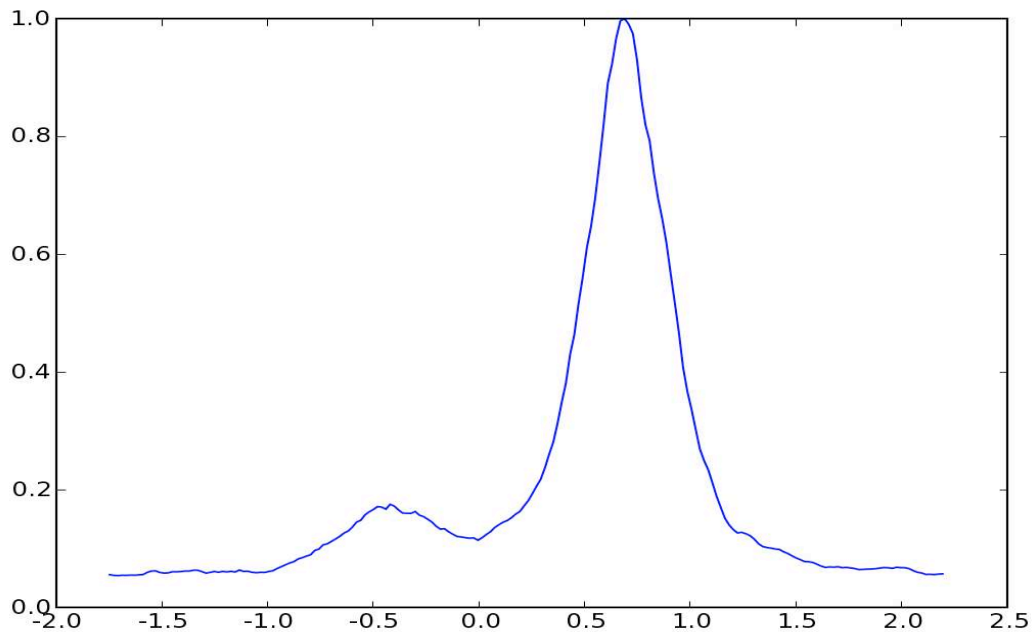


Fig. 7.2: Profil observé pour le multiplet à  $10830 \text{ \AA}$ , à l'aide du télescope THÉMIS, le 30 juin 2007. L'intensité est normalisée par rapport à la valeur maximale.

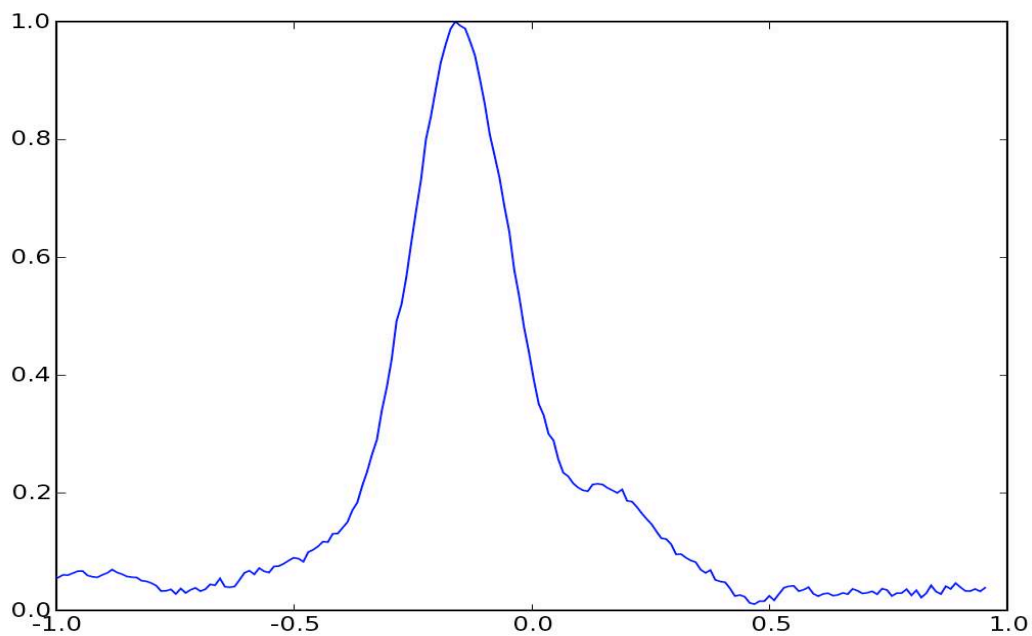


Fig. 7.3: Profil observé pour le multiplet  $D_3$  à l'aide du télescope THÉMIS, le 30 juin 2007. L'intensité est normalisée par rapport à la valeur maximale.

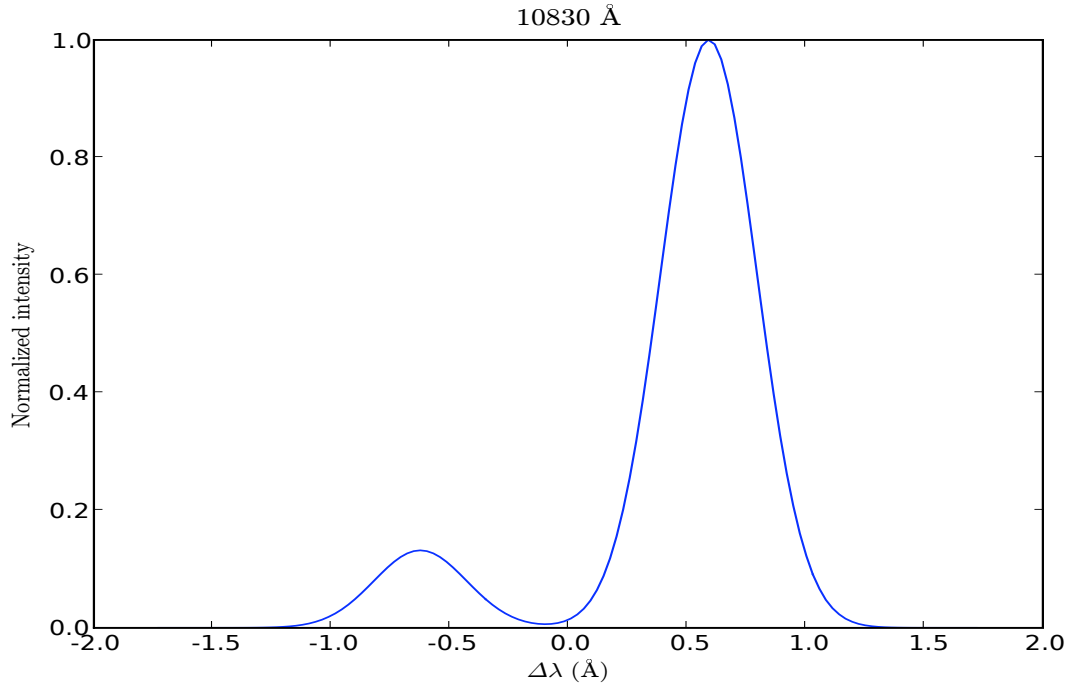


Fig. 7.4: Intensité émergente normalisée en  $\text{erg/s/cm}^2/\text{sr}/\text{\AA}$  pour le multiplet à  $10830 \text{ \AA}$ , pour la protubérance vue au limbe en fonction de l'écart en longueur d'onde au centre du multiplet à  $\lambda = 10832.7 \text{ \AA}$ . L'intensité maximale vaut  $18301 \text{ erg/s/cm}^2/\text{sr}/\text{\AA}$ . La température est  $T = 8000 \text{ K}$  et la pression gazeuse est  $p_g = 0.05 \text{ dyn cm}^{-2}$ .

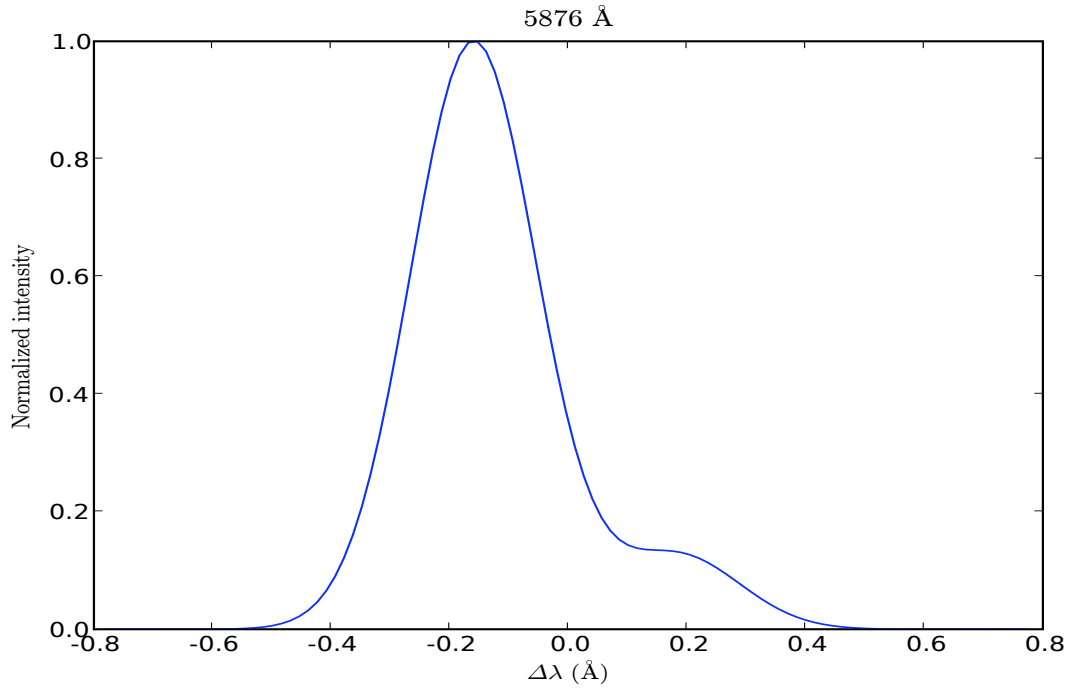


Fig. 7.5: Intensité émergente normalisée en  $\text{erg/s/cm}^2/\text{sr}/\text{\AA}$  pour le multiplet  $D_3$ , pour la protubérance vue au limbe en fonction de l'écart en longueur d'onde au centre du multiplet à  $\lambda = 5877.4 \text{ \AA}$ . L'intensité maximale vaut  $5449 \text{ erg/s/cm}^2/\text{sr}/\text{\AA}$ . La température est  $T = 8000 \text{ K}$  et la pression gazeuse est  $p_g = 0.05 \text{ dyn cm}^{-2}$ .

Sur les Figs. (7.4) et (7.5), on a tracé les intensités émergentes pour les multiplets à 10830 Å et  $D_3$ . Ces intensités sont prises au centre de la couche à la position  $D_z/2$  pour la protubérance vue au limbe sous un angle nul. On voit immédiatement que l'ajout de la structure fine dans le modèle atomique permet d'obtenir des profils comparables aux observations, avec les deux pics "bleu" et "rouge".

Je m'intéresse maintenant à la profondeur optique de ces deux multiplets. Les valeurs obtenues, au centre de la couche à la position  $D_z/2$  et pour la fréquence correspondant au maximum d'intensité du multiplet, pour le modèle choisi ici sont :

$$\begin{aligned}\tau(10830) &= 5,1 \times 10^{-2} \\ \tau(D_3) &= 4,4 \times 10^{-3}.\end{aligned}$$

Les deux multiplets sont donc optiquement minces. On retrouve que  $\tau(10830) \sim 10 \times \tau(D_3)$  comme Andretta & Jones [2] l'ont montré. Dans les deux cas, on obtient des rapports  $I_r$  de l'ordre de 8.

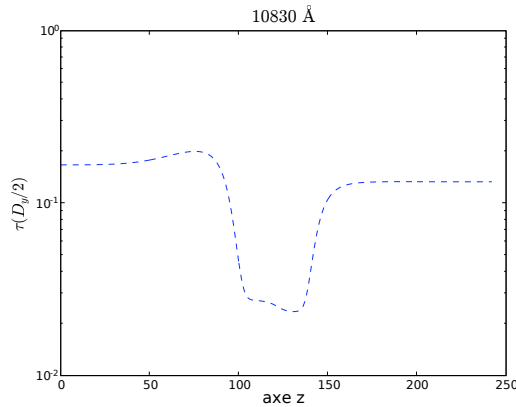


Fig. 7.6: Variation verticale de la profondeur optique pour le multiplet à 10830 Å, pour la position  $D_y/2$ . L'axe des abscisses est donné en indice de position géométrique selon  $z$ , ce qui dilate fortement les bords. Ainsi les 100 premiers points représentent environ 1000 km, de même pour les 100 derniers, les 40 points centraux représentent donc environ 28000 km.

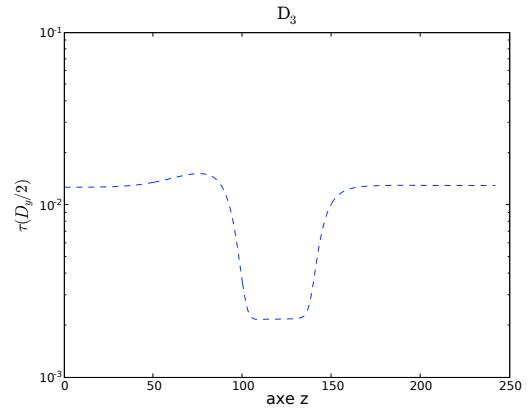


Fig. 7.7: Idem que Fig. (7.6) pour le multiplet  $D_3$ .

Les Figs. (7.6) et (7.7) montrent plus précisément la variation verticale de la profondeur optique de ces deux multiplets, le long de l'axe  $z$ , pour la position  $D_y/2$ . L'axe des abscisses est donné en indice de position, ce qui dilate fortement les bords. Ainsi les 100 premiers points représentent environ 1000 km, de même pour les 100 derniers, les 40 points centraux représentent donc environ 28000 km. On se rend ainsi compte que la couche est la plus épaisse à son sommet et à son pied.

Toutefois la résolution angulaire de THÉMIS ne permet de voir, dans les conditions d'observation par accumulation d'images, que des détails d'un peu plus de 1200 km, ce

qui correspond à environ  $1.5''$  d'arc. Il faut donc intégrer la profondeur optique sur une distance de l'ordre de 1 200 km afin de simuler la profondeur optique telle qu'elle serait vue par THÉMIS. Cette intégration fournit les valeurs suivantes pour le sommet de la couche :

$$\begin{aligned}\tau(10830) &= 1,4 \times 10^{-1} \\ \tau(D_3) &= 1,1 \times 10^{-2}.\end{aligned}$$

La profondeur optique est ainsi plus grande que celle vue au centre mais les deux multiplets restent optiquement minces, avec des rapports  $I_r$  de l'ordre de 8 pour le multiplet  $D_3$ , contrairement aux observations effectuées.

On a représenté la variation de la profondeur optique intégrée sur le haut de la couche en fonction de la température pour deux pressions gazeuses différentes  $p = 0.02$  et  $p = 0.2 \text{ dyn cm}^{-2}$  sur les Figs. (7.8) et (7.9), pour les multiplets à  $10830 \text{ \AA}$  et  $D_3$ . La profondeur optique de ces deux multiplets contrôle les intensités émergentes (Andretta & Jones [2]). On retrouve donc le comportement déjà vu au chapitre précédent sur les Figs. (6.16) et (6.17), à faible pression  $p = 0.02 \text{ dyn cm}^{-2}$  la profondeur optique diminue avec la température en raison de l'augmentation de la densité électronique. Tandis qu'à pression plus élevée ( $p = 0.02 \text{ dyn cm}^{-2}$ ), la profondeur optique augmente avec la température, en raison de l'excitation collisionnelle qui devient importante.

Les multiplets sont donc les plus optiquement épais à haute température et haute pression. Même dans ce régime, les profondeurs optiques du multiplet  $D_3$  n'atteignent jamais la valeur de  $\tau \sim 0.1$ .

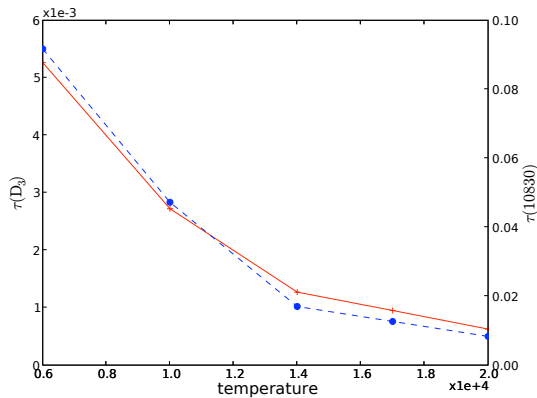


Fig. 7.8: Variation de la profondeur optique intégrée sur le haut de la couche, pour les multiplets à  $10830 \text{ \AA}$  (pointillés) et  $D_3$  (ligne continue), en fonction de la température, pour une pression  $p = 0.02 \text{ dyn cm}^{-2}$ .

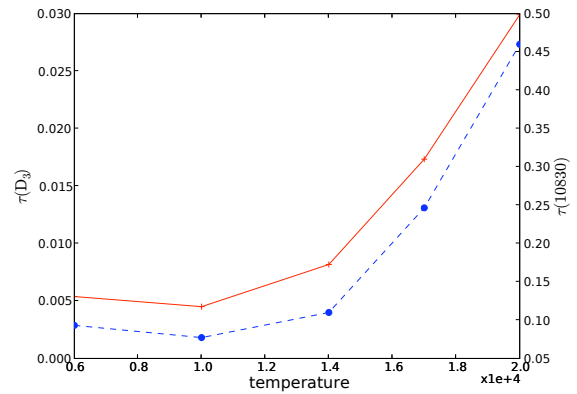


Fig. 7.9: Idem que Fig. (7.8), pour une pression  $p = 0.2 \text{ dyn cm}^{-2}$ .

Ces résultats sont cohérents avec ceux de Labrosse & Gouttebroze [74] : ils ne trouvent aucun modèle pour lequel  $D_3$  est optiquement épaisse, et  $\tau(10830) > 1$  pour des modèles



où  $T > 20000$  K et  $p_g > 0.64 \text{ dyn cm}^{-2}$ , conditions qui ne sont pas représentatives des protubérances calmes.

Ce comportement n'est pas satisfaisant par rapport aux observations. D'autant plus que je me suis placé dans le cas d'une observation du sommet de la protubérance afin de maximiser l'épaisseur optique des deux multiplets. Toutefois, je ne prends pas en compte de région de transition protubérance-couronne, dont les effets sur les raies de l'hydrogène sont déjà connus (Heinzel et al. [63], Vial et al. [137]).

J'ai choisi de modéliser différemment la protubérance, en revenant à un point déjà évoqué au chapitre 5 : la porosité. Les protubérances sont en fait constituées d'éléments de structure fine spatiale. Ceci est justifié à la fois par des observations (voir par exemple Berger et al. [19], Lin et al. [89]) et par des simulations MHD (e.g., Low & Petrie [92]). Une telle modélisation radiative *multi-couches* 2D des protubérances solaires a été utilisée récemment par Gunár et al. (2007), dans le but d'interpréter les observations UV de la série de Lyman de l'hydrogène, faites avec le spectrographe SUMER à bord de SoHO.

## 7.2.2 Modèle multi-couches

Je choisis des filaments 2D tous identiques (voir Fig. 7.10) d'extension horizontale  $D_y = 1200$  km. Cette valeur tient compte de l'effet d'intégration spatiale due à la résolution angulaire de THÉMIS. Je considère qu'il n'y a aucune interaction entre deux éléments de mon modèle (Fontenla & Rovira [48], Vial et al. [137]). Ainsi, dans une première étape, il me suffit d'appliquer mon code radiatif 2D à un seul élément puis d'effectuer une solution formelle le long de la ligne de visée, afin de prendre en compte les contributions de chaque couche élémentaire.



Fig. 7.10: Visualisation du modèle multi-couches d'une protubérance. Les couches élémentaires sont empilées le long de la ligne de visée, et il n'y a aucune interaction entre elles. L'intensité émergente est calculée comme la solution formelle, le long de la ligne de visée, afin de prendre en compte les contributions de chaque couche élémentaire.

### 7.2.2.1 Étude d'une couche élémentaire

L'extension verticale de la couche élémentaire peut varier  $D_z = 1200, 2000, 2500, 3000, 4000$  et  $5000$  km. La vitesse de microturbulence est  $\xi = 5 \text{ km s}^{-1}$ . L'altitude du bas de la couche est  $H_0 = 10000$  km. J'ai choisi une grille spatiale logarithmique de  $123 \times 123$  points. Compte-tenu des régimes pour lesquels l'épaisseur optique est la plus importante, j'ai choisi de travailler dans des régimes de hautes température et pression. Ainsi, la température peut varier  $T = 8000, 10000, 12000, 15000, 16000$  et  $17000$  K et la pression gazeuse peut prendre deux valeurs  $p_g = 0.5$  et  $1.0 \text{ dyn cm}^{-2}$ .  $8000$  K correspond à une température communément admise pour les protubérances calmes (Fontenla & Rovira [47] [48],

Heinzel [59]). Les températures plus élevées correspondent plutôt aux zones de transition protubérance-couronne (Vial et al. [137], Heinzel [59], Fontenla et al. [49]).

Il existe deux mécanismes différents à l'origine de la formation des multiplets à 10830 Å et  $D_3$  (Andretta & Jones [2]). Pour des températures inférieures à 20 000 K, le mécanisme PR (photoionisation-recombinaison) est prépondérant : les niveaux triplets de He I sont peuplés par recombinaison à partir du niveau fondamental de He II (Hirayama [65], Heasley et al. [58], Zirin [144]). Pour des températures supérieures à 20 000 K, les niveaux triplets sont peuplés majoritairement par excitation collisionnelle à partir du niveau fondamental de He I (Athay [4]).

Sur les Figs. (7.11)-(7.14) on montre l'intensité émergente, intégrée sur toute la hauteur de la couche selon la formule

$$\bar{I}(\nu) = \frac{\int_0^{D_z} I(\nu, z) dz}{D_z}, \quad (7.1)$$

pour les multiplets à 10830 Å et  $D_3$ , pour une pression  $p = 0.5 \text{ dyn cm}^{-2}$  et une température  $T = 10000 \text{ K}$ , pour les six extensions verticales différentes, avec et sans rayonnement coronal sur la face supérieure en  $z = 0$ . On voit ainsi que le rayonnement coronal augmente l'intensité émergente. Ce résultat est en accord avec Andretta & Jones [2] : à cette température le mécanisme PR est prépondérant et le rayonnement coronal, en augmentant l'ionisation à l'intérieur de la couche, renforce l'intensité des deux multiplets.

Si on trace ces mêmes courbes pour  $p = 1 \text{ dyn cm}^{-2}$ , on obtient des intensités plus faibles. En effet, pour une illumination coronale donnée, l'augmentation de la pression dépeuple les niveaux triplets par transition collisionnelle vers les états singulets et cascade résonnante vers le niveau fondamental de He I. Les intensités de multiplets à 10830 Å et  $D_3$  diminuent en conséquence (Andretta & Jones [2]). Le choix de la pression sera donc déterminant pour concilier épaisseur optique et intensité émergente des multiplets.

Les Figs. (7.11)-(7.14) montrent également les effets de géométrie 2D sur les intensités émergentes. On retrouve le résultat déjà vu au chapitre précédent : les intensités émergentes diminuent lorsque l'extension verticale augmente. Ce résultat justifie, à nouveau, l'intérêt de faire un modèle 2D pour mieux prendre en compte les conditions d'illumination, chromosphérique et coronale, entre autres.

Sur les Figs. (7.15)-(7.18) on montre  $I_r$  pour les multiplets à 10830 Å et  $D_3$ , l'intensité émergente étant intégrée sur toute la hauteur de la couche selon l'Eq. (7.1), ainsi que la profondeur optique intégrée de la même façon sur toute la hauteur de la couche, en fonction de la température pour les deux pressions considérées ici et pour une extension verticale  $D_z = 1200 \text{ km}$ . On voit apparaître des profondeurs optiques qui se rapprochent de 0.1 pour le multiplet  $D_3$ , mais  $I_r$  est très légèrement inférieur à 8 et reste quasiment constant sur toute la gamme de température.

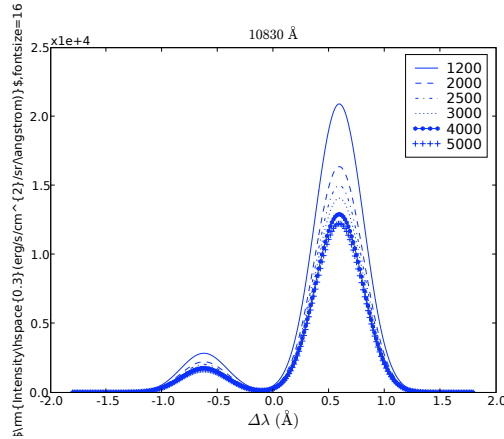


Fig. 7.11: Intensité émergente en  $\text{erg/s/cm}^2/\text{sr}/\text{\AA}$ , intégrée sur toute la hauteur de la couche, pour le multiplet à  $10830 \text{ \AA}$  pour une pression  $p = 0.5 \text{ dyn cm}^{-2}$ , pour une température  $T = 10000 \text{ K}$  et pour six extensions verticales différentes, sans rayonnement coronal sur la face supérieure  $z = 0$ .

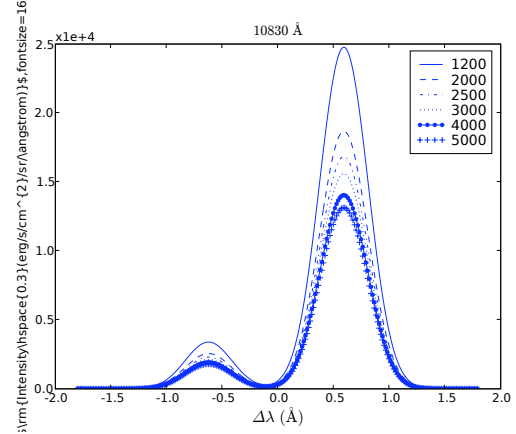


Fig. 7.12: Idem que Fig. (7.11), avec rayonnement coronal sur la face supérieure  $z = 0$ .

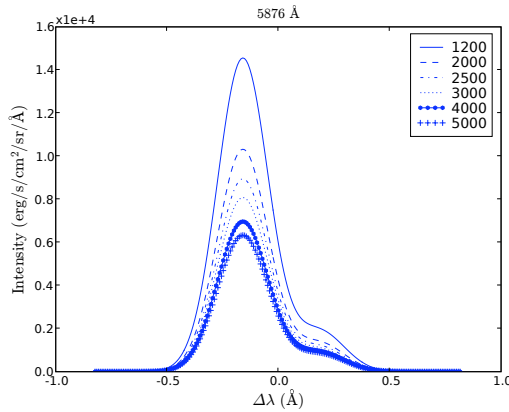


Fig. 7.13: Intensité émergente en  $\text{erg/s/cm}^2/\text{sr}/\text{\AA}$ , intégrée sur toute la hauteur de la couche, pour le multiplet  $D_3$  pour une pression  $p = 0.5 \text{ dyn cm}^{-2}$ , pour une température  $T = 10000 \text{ K}$  et pour six extensions verticales différentes, sans rayonnement coronal sur la face supérieure  $z = 0$ .

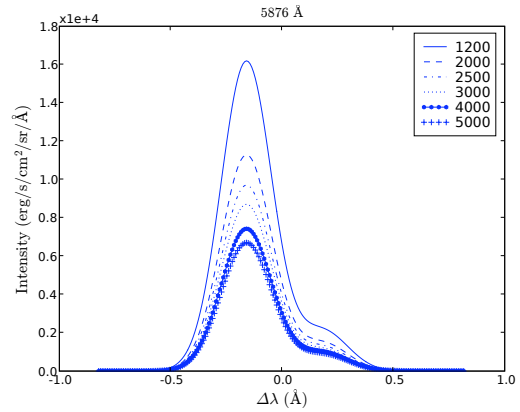


Fig. 7.14: Idem que Fig. (7.13), avec rayonnement coronal sur la face supérieure  $z = 0$ .

### 7.2.2.2 Étude du multi-couches

Je vais maintenant considérer que plusieurs de ces couches élémentaires se trouvent le long de la ligne de visée. Dans un souci de simplification, je suppose que toutes les couches élémentaires ont les mêmes dimensions et se trouvent à la même altitude. De

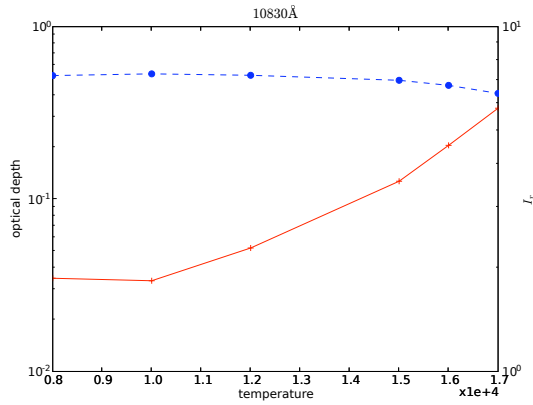


Fig. 7.15:  $I_r$  (pointillés) et profondeur optique intégrée sur toute la hauteur de la couche (ligne continue), pour le multiplet à 10830 Å en fonction de la température, pour une pression  $p = 0.5 \text{ dyn cm}^{-2}$  et une extension verticale  $D_z = 1200 \text{ km}$ .

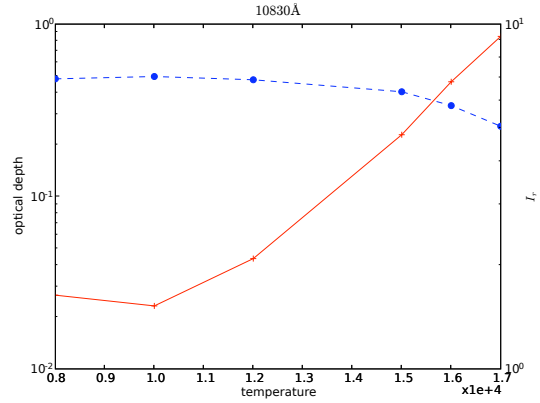


Fig. 7.16: Idem que fig. (7.15), pour une pression  $p = 1 \text{ dyn cm}^{-2}$ .

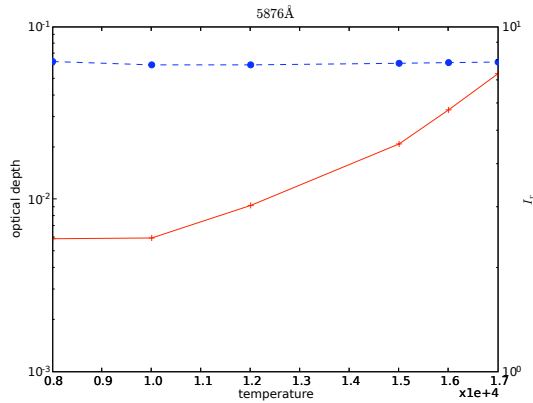


Fig. 7.17:  $I_r$  (pointillés) et profondeur optique intégrée sur toute la hauteur de la couche (ligne continue), pour le multiplet  $D_3$  en fonction de la température, pour une pression  $p = 0.5 \text{ dyn cm}^{-2}$  et une extension verticale  $D_z = 1200 \text{ km}$ .

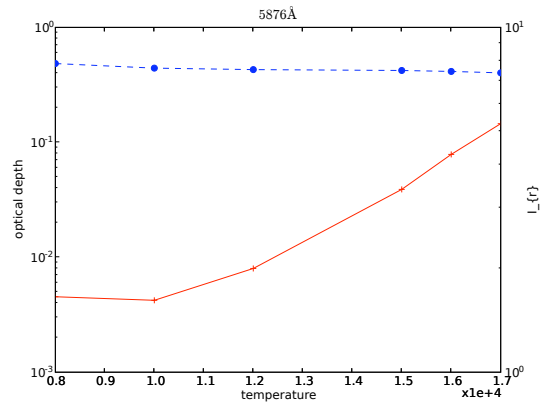


Fig. 7.18: Idem que fig. (7.17), pour une pression  $p = 1 \text{ dyn cm}^{-2}$ .

plus, il n'y a aucune interaction entre les couches élémentaires (Fontenla & Rovira [48] et Vial et al. [137]). On considère une ligne de visée perpendiculaire à l'extension verticale des éléments. L'épaisseur optique le long de la ligne de visée est donc la somme des épaisseurs optiques de chaque couche élémentaire. L'intensité émergente est calculée comme la solution formelle de l'équation de transfert radiatif à travers toutes les couches élémentaires, mises les unes après les autres (voir Fig. 7.10).

Sur les Figs. (7.19)-(7.22), on a représenté  $I_r$  pour les multiplets à 10830 Å et  $D_3$ , l'intensité émergente étant intégrée sur toute la hauteur de la couche selon l'Eq. (7.1), en fonction du nombre de couches élémentaires, pour une pression  $p = 0.5 \text{ dyn cm}^{-2}$  et

les deux températures extrêmes considérées ici  $T = 8\,000$  et  $17\,000$  K. On a également représenté la profondeur optique intégrée de la même façon sur toute la hauteur de la couche pour les mêmes conditions. On peut ainsi déterminer le nombre de couches nécessaires pour avoir  $I_r$  de l'ordre de 6 pour le multiplet  $D_3$  (López Ariste & Casini [90]).

Pour  $T = 8\,000$  K, il faut une trentaine de couches, ce qui représente une épaisseur totale de  $36\,000$  km pour la protubérance. La profondeur optique correspondante vaut alors  $\sim 0.2$ . Pour  $T = 17\,000$  K, le nombre de couches est environ 15, et la profondeur optique vaut alors  $\sim 0.7$ .

Le travail effectué ici est très prometteur et a fait l'objet d'une communication au dernier Solar Polarization Workshop (Léger & Paletou [78]). Je parviens à synthétiser des multiplets optiquement épais, en considérant quelques dizaines de couches élémentaires pour des pressions couramment admises pour des protubérances calmes, mais pour des températures plus élevées.

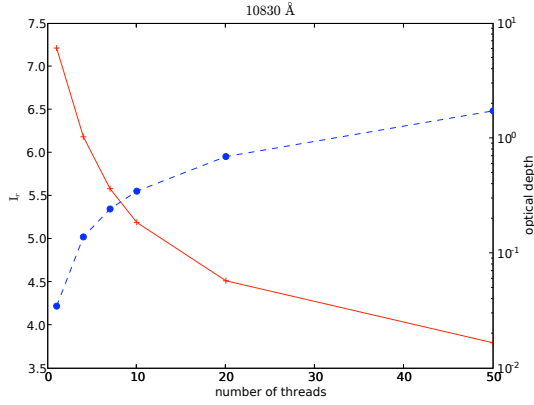


Fig. 7.19:  $I_r$  (ligne continue) et profondeur optique intégrée sur toute la hauteur de la couche (pointillés), pour le multiplet à 10830 Å en fonction du nombre de couches élémentaires, pour une pression  $p = 0.5 \text{ dyn cm}^{-2}$  et une température  $T = 8000 \text{ K}$ .

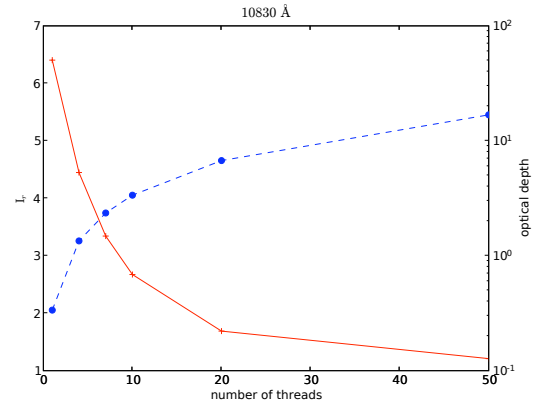


Fig. 7.20: Idem que Fig. (7.19), pour une température  $T = 17000 \text{ K}$ .

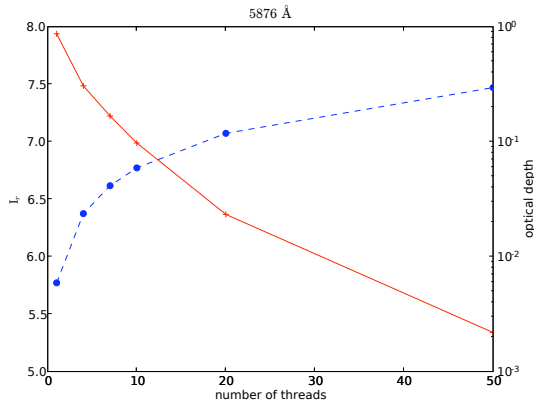


Fig. 7.21:  $I_r$  (ligne continue) et profondeur optique intégrée sur toute la hauteur de la couche (pointillés), pour le multiplet  $D_3$  en fonction du nombre de couches élémentaires, pour une pression  $p = 0.5 \text{ dyn cm}^{-2}$  et une température  $T = 8000 \text{ K}$ .

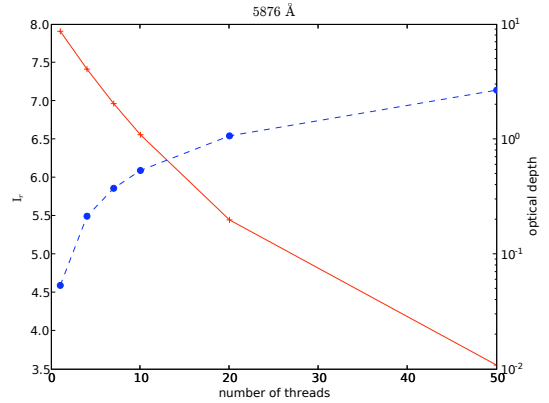


Fig. 7.22: Idem que Fig. (7.21), pour une température  $T = 17000 \text{ K}$ .





# Conclusion et perspectives

---

La méthode ALI et sa généralisation pour l'atome à plusieurs niveaux MALI constitue actuellement la base de nombreux codes radiatifs numériques hors-ETL. Ces codes sont utilisés dans l'étude de cas astrophysiques variés, tels que les environnements circumstellaires, les étoiles chaudes avec vent, la polarisation solaire, ou encore le transport de neutrinos. Malgré une efficacité indéniable en termes de précision et de traitement de problèmes radiatifs complexes, ces méthodes souffrent d'un taux de convergence qui se dégrade fortement lorsque la résolution spatiale des grilles utilisées augmente. Or cette résolution est nécessaire à l'obtention d'une solution précise (Chevallier et al. [33]). Afin de pallier ce genre de problèmes, une solution réside dans les propositions de Trujillo Bueno & Fabiani Bendicho [134] d'appliquer au cas du transfert radiatif les schémas itératifs de Gauss-Seidel (GS) et SOR qui permettent d'obtenir, à précision égale, un temps de calcul beaucoup plus faible. Toutefois, ces méthodes sont restées jusqu'à présent très confidentielles, malgré leur intérêt indéniable.

Durant la première partie de ma thèse, après m'être familiarisé avec la méthode numérique MALI pour l'atome à plusieurs niveaux en géométrie 2D, j'ai explicité de manière précise la mise en œuvre de GS/SOR pour l'atome à deux niveaux en 2D, comme je l'avais fait pour l'atome à plusieurs niveaux en géométrie 1D (Paletou & Léger [109]). Puis j'ai inséré ce schéma itératif dans la technique multi-grille (MG) décrite par Fabiani Bendicho et al. [44] pour obtenir un nouveau code radiatif en géométrie 2D cartésienne (Léger et al. [79]).

Les tests réalisés ont eu pour but de comparer MG+GS/SOR au schéma itératif MALI plus couramment utilisé : cela a confirmé les résultats déjà obtenus pour l'atome à deux niveaux en 1D, à savoir que MG+GS/SOR a un taux de convergence bien supérieur pour une même précision, ce qui permet d'économiser de manière importante du temps de calcul. Ceci est encore plus marqué lorsqu'on travaille sur des grilles spatiales très fines, puisque la technique multi-grille *garantit un nombre d'itérations quasiment constant avec le raffinement spatial*. Le gain peut atteindre un facteur de l'ordre de 10 sur le temps de calcul, pour une grille spatiale de 243 x 243 points par exemple. De plus, le critère de convergence le plus accessible,  $R_c$ , garantit une valeur du même ordre de grandeur de l'écart à la solution convergée,  $C_e$ , ce qui n'est pas le cas de MALI. Tous les résultats et tests sont présentés dans deux publications (Paletou & Léger [109], Léger et al. [79]).

J'ai ensuite appliqué mon code radiatif 2D à l'étude des protubérances solaires. J'ai comparé les résultats obtenus pour l'atome d'hydrogène avec Heasley & Milkey [57],

Gouttebroze et al. [53] et Paletou [104], afin de les valider. J'ai ensuite comparé les résultats obtenus pour l'atome d'hélium avec Labrosse & Gouttebroze [73] [74]. J'obtiens de très bons accords, malgré les différences de modèle atomique et de géométrie<sup>c</sup>, et le fait que je me limite à la redistribution complète en fréquence (CRD) alors qu'ils considèrent la redistribution partielle en fréquence (PRD) pour les raies Ly $\alpha$  et Ly $\beta$  de l'hydrogène H I, et pour la raie à 584 Å de l'hélium He I.

Je me suis ensuite intéressé plus particulièrement aux deux multiplets à 10830 Å et D<sub>3</sub>. La prise en compte de la structure fine atomique pour les niveaux triplets de l'atome d'hélium me permet de synthétiser des profils cohérents avec les observations à haute résolution spectrale, c'est-à-dire présentant deux composantes résolues (Paletou et al. [112]). Mais l'utilisation du modèle classique de protubérance, comme une seule couche isotherme, isobare, statique et homogène, ne permet pas de synthétiser des multiplets suffisamment optiquement épais, sauf dans des conditions extrêmes de température et de pression, qui ne correspondent pas aux paramètres physiques typiques des protubérances calmes (Engvold et al. [43]).

J'ai donc choisi un modèle qui prend en compte la structure fine *spatiale* dans la protubérance (Heinzel [59], Vial et al. [137], Heinzel & Anzer [61] et articles suivants). Ceci revient à considérer plusieurs couches élémentaires le long de la ligne de visée, que j'ai supposées sans interactions entre elles, dans un premier temps. Ceci permet d'obtenir des rapports entre les deux pics  $I_{\text{bleu}}/I_{\text{rouge}}$  proches de 6, pour le multiplet D<sub>3</sub>, conformément aux observations effectuées à THÉMIS (López Ariste & Casini [90]). Mais, pour obtenir ce résultat, il faut soit considérer des températures de l'ordre de 15 000 K, ce qui est plus élevé que la température typique de 8 000 K d'une protubérance, soit prendre en compte une trentaine de couches élémentaires le long de la ligne de visée.

Il faut donc encore comparer les intensités émergentes synthétisées avec les intensités réellement observées afin de contraindre plus précisément la température et la pression, le nombre et la taille des couches élémentaires, entre autres. Il faut également envisager des améliorations au code actuel afin d'obtenir des résultats plus *précis*. Ainsi, il faudrait considérer des couches *plus petites*, qui sont spatialement résolues avec certains instruments (de l'ordre de 350 km, voir Engvold [43], Mein et al. [96]), et aussi prendre en compte les *interactions* entre couches (Heinzel [59]). Il faudrait également utiliser *la PRD* pour les raies Ly $\alpha$  et Lyman $\beta$  de l'hydrogène, ainsi que pour la raie résonante à 584 Å de l'hélium. Enfin, il faudrait prendre en compte une région de transition protubérance-couronne, pour chaque structure élémentaire, dont les effets sur les raies de l'hydrogène sont déjà connus (Heinzel et al. [63], Vial et al. [137]).

L'étape suivante est un travail prospectif de couplage de ces calculs avec les outils de synthèse des paramètres de Stokes. Il s'agit d'utiliser les calculs des  $J_0^0$  et  $J_0^2$  (voir Trujillo Bueno & Asensio Ramos [133]) possibles avec mon code radiatif 2D, sans polarisation, et de les injecter dans le code de synthèse des paramètres de Stokes de López Ariste & Casini, puis de regarder l'impact éventuel du transfert radiatif sur leur outil d'inversion du champ magnétique.

Mon travail peut également servir pour exploiter les données, dans le domaine UV/EUV,

---

<sup>c</sup>Le modèle utilisé par Labrosse & Gouttebroze contient plus de niveaux atomiques, pour une géométrie 1D plan parallèle

du télescope spatial SOHO, en matière de diagnostic radiatif. Un prolongement naturel peut se faire dans le cadre de la mission SMESE (SMall Explorer for Solar Eruptions), qui a pour but d'étudier les éjections de masse coronale dans le cadre de la météorologie spatiale. Mon code pourrait ainsi aider à la compréhension du phénomène magnétique qui conduit une protubérance éruptive à une éjection de masse coronale.

Le savoir-faire en transfert radiatif que j'ai acquis au cours de cette thèse ouvre de nombreuses autres perspectives. Le développement d'un code radiatif en 3D est la suite naturelle, et les besoins sont importants, entre autres pour contribuer à l'amélioration de la partie radiative des nouveaux codes de magnétohydro-dynamique radiative en géométrie 3D (González et al. [52] par exemple). On peut citer également des besoins pour l'étude des environnements protostellaires et protoplanétaires, avec les spectropolatimètres ESPaDOnS et NARVAL (Donati et al. [40]), mais aussi le diagnostic radiatif des futures données de la mission Herschel, ou de l'interféromètre ALMA.



# A

## Données collisionnelles pour l'atome He I

Les deux tableaux qui suivent donnent les forces effectives de collision nécessaires au calcul des coefficients collisionnels entre deux niveaux *liés* quelconques de l'atome He I. Le Tab. (A.1) repris de Benjamin et al. [17] fournit les forces effectives de collision  $\Omega_4$  et  $b_\Omega$  à appliquer dans l'Eq. (6.8). Lorsque les forces de collision pour une transition considérée ne sont pas données dans Benjamin et al. [17], le Tab. (A.2) repris de Benson & Kulander [18] fournit les forces de collision  $A$ ,  $n$  et  $\alpha$  à appliquer dans l'Eq. (6.9).

$N_l$	$L_l$	$S_l$	$N_u$	$L_u$	$S_u$	$\Omega_4$	$b_\Omega$
1	0	0	2	0	1	6.86E-02	0.020
1	0	0	2	0	0	3.60E-02	0.180
1	0	0	2	1	1	2.27E-02	0.463
1	0	0	2	1	0	1.54E-02	0.631
1	0	0	3	0	1	1.60E-02	0.036
1	0	0	3	0	0	8.75E-03	0.118
1	0	0	3	1	1	7.39E-03	0.324
1	0	0	3	1	0	3.72E-03	0.906
1	0	0	3	2	1	2.30E-03	0.094
1	0	0	3	2	0	4.78E-03	0.071
1	0	0	4	0	1	6.90E-03	0.228
1	0	0	4	0	0	3.52E-03	0.435
1	0	0	4	1	1	3.68E-03	0.539
1	0	0	4	1	0	2.23E-03	1.236
1	0	0	4	2	1	1.37E-03	0.495
1	0	0	4	2	0	2.72E-03	0.627
1	0	0	4	3	1	4.90E-04	0.089
1	0	0	4	3	0	7.59E-04	0.053
2	0	0	2	1	1	1.70E+00	0.094
2	0	0	2	1	0	1.85E+01	0.719

suite du tableau sur la page suivante

$N_l$	$L_l$	$S_l$	$N_u$	$L_u$	$S_u$	$\Omega_4$	$b_\Omega$
2	0	0	3	0	1	5.67E-01	-0.375
2	0	0	3	0	0	6.19E-01	0.170
2	0	0	3	1	1	5.11E-01	-0.201
2	0	0	3	1	0	3.44E-01	0.325
2	0	0	3	2	1	3.33E-01	0.285
2	0	0	3	2	0	1.22E+00	0.580
2	0	0	4	0	1	1.96E-01	-0.190
2	0	0	4	0	0	1.68E-01	0.326
2	0	0	4	1	1	1.86E-01	-0.055
2	0	0	4	1	0	1.22E-01	0.737
2	0	0	4	2	1	1.24E-01	0.513
2	0	0	4	2	0	3.50E-01	0.728
2	0	0	4	3	1	8.66E-02	0.226
2	0	0	4	3	0	2.58E-01	0.663
2	1	0	3	0	1	1.11E+00	-0.295
2	1	0	3	0	0	8.68E-01	0.212
2	1	0	3	1	1	1.18E+00	-0.126
2	1	0	3	1	0	1.42E+00	0.638
2	1	0	3	2	1	8.19E-01	0.330
2	1	0	3	2	0	3.68E+00	0.731
2	1	0	4	0	1	4.19E-01	-0.109
2	1	0	4	0	0	3.15E-01	0.320
2	1	0	4	1	1	4.15E-01	-0.008
2	1	0	4	1	0	4.46E-01	0.988
2	1	0	4	2	1	3.14E-01	0.492
2	1	0	4	2	0	1.16E+00	0.871
2	1	0	4	3	1	1.85E-01	0.206
2	1	0	4	3	0	8.13E-01	0.702
3	0	0	3	1	1	3.08E+00	-0.324
3	0	0	3	1	0	1.18E+00	0.927
3	0	0	3	2	1	1.60E+00	0.012
3	0	0	4	0	1	7.36E-01	-0.588
3	0	0	4	0	0	2.18E+00	0.267
3	0	0	4	1	1	9.01E-01	-0.424
3	0	0	4	1	0	9.79E-01	0.594
3	0	0	4	2	1	7.57E-01	-0.210
3	0	0	4	2	0	3.21E+00	0.441
3	0	0	4	3	1	1.27E+00	0.081
3	0	0	4	3	0	4.16E+00	0.603
3	1	0	4	0	1	9.66E-01	-0.262
3	1	0	4	0	0	2.45E+00	0.635
3	1	0	4	1	1	1.42E+00	-0.250
3	1	0	4	1	0	4.21E+00	0.536

suite du tableau sur la page suivante

$N_l$	$L_l$	$S_l$	$N_u$	$L_u$	$S_u$	$\Omega_4$	$b_\Omega$
3	1	0	4	2	1	1.40E+00	-0.008
3	1	0	4	2	0	5.75E+00	0.455
3	1	0	4	3	1	1.77E+00	0.186
3	1	0	4	3	0	8.60E+00	0.379
3	2	0	3	1	0	3.30E+01	1.377
3	2	0	4	0	1	1.40E+00	-0.309
3	2	0	4	0	0	2.91E+00	0.031
3	2	0	4	1	1	2.52E+00	-0.290
3	2	0	4	1	0	4.85E+00	0.272
3	2	0	4	2	1	2.54E+00	-0.049
3	2	0	4	2	0	1.06E+01	0.237
3	2	0	4	3	1	3.47E+00	0.076
3	2	0	4	3	0	2.14E+01	0.696
4	0	0	4	1	1	2.58E+00	-0.488
4	0	0	4	1	0	2.17E+01	0.726
4	0	0	4	2	1	1.93E+00	-0.275
4	0	0	4	3	1	1.95E+00	-0.248
4	0	0	4	3	0	1.52E+01	-0.455
4	2	0	4	1	0	1.55E+02	1.456
4	2	0	4	3	1	7.72E+00	-0.167
4	2	0	4	3	0	3.83E+03	1.308
4	3	0	4	3	1	1.28E+01	-0.129
2	0	1	2	0	0	2.39E+00	-0.018
2	0	1	2	1	1	2.69E+01	0.812
2	0	1	2	1	0	9.74E-01	0.241
2	0	1	3	0	1	2.39E+00	-0.045
2	0	1	3	0	0	3.84E-01	-0.242
2	0	1	3	1	1	1.76E+00	0.019
2	0	1	3	1	0	1.57E-01	0.176
2	0	1	3	2	1	2.07E+00	0.636
2	0	1	3	2	0	3.08E-01	0.034
2	0	1	4	0	1	7.48E-01	0.132
2	0	1	4	0	0	1.32E-01	-0.091
2	0	1	4	1	1	6.23E-01	0.204
2	0	1	4	1	0	6.39E-02	0.450
2	0	1	4	2	1	7.33E-01	0.873
2	0	1	4	2	0	1.28E-01	0.354
2	0	1	4	3	1	5.05E-01	0.501
2	0	1	4	3	0	5.05E-02	0.124
2	1	1	2	1	0	2.07E+00	0.411
2	1	1	3	0	1	5.70E+00	0.018
2	1	1	3	0	0	6.93E-01	-0.187
2	1	1	3	1	1	8.06E+00	0.251

suite du tableau sur la page suivante



$N_l$	$L_l$	$S_l$	$N_u$	$L_u$	$S_u$	$\Omega_4$	$b_\Omega$
2	1	1	3	1	0	5.74E-01	0.204
2	1	1	3	2	1	7.74E+00	0.867
2	1	1	3	2	0	8.62E-01	0.074
2	1	1	4	0	1	1.72E+00	0.156
2	1	1	4	0	0	3.17E-01	-0.089
2	1	1	4	1	1	2.81E+00	0.430
2	1	1	4	1	0	1.94E-01	0.491
2	1	1	4	2	1	2.72E+00	0.961
2	1	1	4	2	0	3.21E-01	0.275
2	1	1	4	3	1	2.18E+00	0.619
2	1	1	4	3	0	1.56E-01	0.185
3	0	1	3	0	0	2.81E+00	-0.444
3	0	1	3	1	1	5.95E+01	0.000
3	0	1	3	1	0	1.46E+00	-0.079
3	0	1	3	2	1	6.38E+01	0.000
3	0	1	3	2	0	2.67E+00	-0.235
3	0	1	4	0	1	7.70E+00	0.111
3	0	1	4	0	0	5.37E-01	-0.509
3	0	1	4	1	1	6.67E+00	0.304
3	0	1	4	1	0	3.13E-01	-0.072
3	0	1	4	2	1	5.74E+00	0.412
3	0	1	4	2	0	9.01E-01	-0.264
3	0	1	4	3	1	1.25E+01	0.545
3	0	1	4	3	0	1.07E+00	0.100
3	1	1	3	1	0	3.43E+00	0.114
3	1	1	3	2	1	1.84E+01	0.717
3	1	1	3	2	0	6.96E+00	-0.176
3	1	1	4	0	1	1.48E+01	0.463
3	1	1	4	0	0	9.72E-01	-0.370
3	1	1	4	1	1	1.98E+01	0.251
3	1	1	4	1	0	1.05E+00	-0.101
3	1	1	4	2	1	1.71E+01	0.330
3	1	1	4	2	0	2.08E+00	-0.182
3	1	1	4	3	1	2.98E+01	0.385
3	1	1	4	3	0	1.88E+00	0.177
3	2	1	3	1	0	3.61E+00	0.153
3	2	1	3	2	0	6.93E+00	0.100
3	2	1	4	0	1	1.45E+01	0.008
3	2	1	4	0	0	1.01E+00	-0.289
3	2	1	4	1	1	2.28E+01	0.126
3	2	1	4	1	0	1.24E+00	-0.009
3	2	1	4	2	1	3.53E+01	0.240
3	2	1	4	2	0	2.72E+00	-0.075

suite du tableau sur la page suivante

$N_l$	$L_l$	$S_l$	$N_u$	$L_u$	$S_u$	$\Omega_4$	$b_\Omega$
3	2	1	4	3	1	6.37E+01	0.630
3	2	1	4	3	0	3.24E+00	0.062
4	0	1	4	0	0	2.27E+00	-0.608
4	0	1	4	1	1	6.38E+01	0.636
4	0	1	4	1	0	1.08E+00	-0.214
4	0	1	4	2	0	2.50E+00	-0.352
4	0	1	4	3	1	4.49E+01	-0.316
4	0	1	4	3	0	2.06E+00	-0.223
4	1	1	4	1	0	3.58E+00	-0.086
4	1	1	4	2	1	8.29E+01	0.890
4	1	1	4	2	0	6.83E+00	-0.342
4	1	1	4	3	0	5.38E+00	-0.281
4	2	1	4	1	0	3.82E+00	-0.145
4	2	1	4	2	0	7.66E+00	-0.127
4	2	1	4	3	1	7.57E+03	1.355
4	2	1	4	3	0	7.79E+00	-0.173
4	3	1	4	1	0	4.02E+00	-0.185

Tab. A.1: Coefficients  $\Omega_4$  et  $b_\Omega$  pour le calcul des coefficients collisionnels pour chaque transition de l'atome He I considéré (Benjamin et al. [17]).

$N_l$	$L_l$	$S_l$	$N_u$	$L_u$	$S_u$	A	n	$\alpha$
3	0	0	3	2	0	8.22E-01	-1.370	1.920
4	0	0	4	2	0	8.88E-01	-1.590	4.760
4	3	0	4	1	0	2.17E+02	-2.450	70.300
4	0	1	4	2	1	9.05E-03	-1.380	1.980
4	1	1	4	3	1	3.63E+00	-1.950	15.800

Tab. A.2: Coefficients  $A$ ,  $n$  et  $\alpha$  pour le calcul des coefficients collisionnels des transitions de l'atome He I non présentes dans Benjamin et al. [17] (Benson & Kulander [18]).



# B

## Données sur les transitions radiatives pour l'atome He I

Les transitions radiativement permises sont données dans le Tab. (B.1) pour le modèle Hen4 et dans le Tab. (B.2) pour le modèle Hen3sf. On donne également la longueur d'onde, les coefficients d'Einstein pour l'émission spontanée (Benjamin et al. [17], complété par les données du NIST pour les niveaux de structure fine).

$I_c$  est le rayonnement chromosphérique associé à chaque transition radiative, il est donné par Heasley et al. [58] et multiplié par deux, à quelques exceptions près données par Labrosse et al. [75]. Pour toutes les raies indiquées  $T_{color}$  dans le Tab. (B.1), on a utilisé la méthode de température de couleur avec les données du Tab. (2b) de Heasley et al. [58]

$N_l$	$L_l$	$S_l$	$N_u$	$L_u$	$S_u$	$\lambda$ (Å)	$A_{ul}$	$I_c$
1	0	0	4	1	0	522.21	2.43E+08	16.58E-12
1	0	0	3	1	0	537.03	5.66E+08	Labrosse et al. [75]
1	0	0	2	1	0	584.33	1.80E+09	Labrosse et al. [75]
2	0	1	4	1	1	3188.67	5.63E+06	9.20E-06
2	0	1	3	1	1	3889.74	9.48E+06	6.86E-06
2	0	0	4	1	0	3965.85	6.95E+06	15.72E-06
2	1	1	4	2	1	4472.76	2.46E+07	3.02E-05
2	1	1	4	0	1	4714.49	9.52E+06	3.02E-05
2	1	0	4	2	0	4923.31	1.99E+07	2.68E-05
2	0	0	3	1	0	5017.08	1.34E+07	3.42E-05
2	1	0	4	0	0	5049.15	6.77E+06	2.68E-05
2	1	1	3	2	1	5877.29	7.07E+07	3.82E-05
2	1	0	3	2	0	6680.00	6.37E+07	4.11E-05
2	1	1	3	0	1	7067.20	2.78E+07	4.10E-05
2	1	0	3	0	0	7283.36	1.83E+07	4.12E-05
2	0	1	2	1	1	10833.14	1.02E+07	Labrosse et al. [75]
3	0	1	4	1	1	12530.91	7.09E+05	3.86E-05

suite du tableau sur la page suivante

$N_l$	$L_l$	$S_l$	$N_u$	$L_u$	$S_u$	$\lambda$ (Å)	$A_{ul}$	$I_c$
3	0	0	4	1	0	15087.78	1.41E+06	3.52E-05
3	1	1	4	2	1	17007.14	6.19E+06	3.20E-05
3	2	0	4	1	0	18560.64	2.97E+05	2.74E-05
3	2	1	4	3	1	18690.45	1.38E+07	2.74E-05
3	2	0	4	3	0	18702.32	1.38E+07	2.74E-05
3	1	0	4	2	0	19094.57	7.12E+06	2.64E-05
3	2	1	4	1	1	19548.43	6.46E+05	2.74E-05
2	0	0	2	1	0	20586.91	1.97E+06	2.34E-05
3	1	1	4	0	1	21125.96	6.51E+06	3.20E-05
3	1	0	4	0	0	21137.80	4.59E+06	2.64E-05
3	0	1	3	1	1	42958.84	1.07E+06	6.36E-06
3	0	0	3	1	0	74375.16	2.52E+05	2.20E-06
3	1	1	3	2	1	186235.59	1.29E+04	3.51E-07
4	0	1	4	1	1	108820.56	2.28E+05	$T_{color}$
4	0	0	4	1	0	181000.42	5.83E+04	$T_{color}$
4	1	1	4	2	1	439699.60	4.18E+03	$T_{color}$
3	2	0	3	1	0	957867.25	1.53E+02	13.26E-09
4	2	0	4	1	0	2161877.03	5.66E+01	$T_{color}$

Tab. B.1: Longueur d'onde, coefficient d'Einstein  $A_{ul}$  et rayonnement chromosphérique incident associé, pour chaque transition radiative autorisée, dans le cas du modèle Hen4. On se référera au texte pour les informations sur le rayonnement chromosphérique.

$N_l$	$L_l$	$S_l$	$J_l$	$N_u$	$L_u$	$S_u$	$J_u$	$\lambda$ (Å)	$A_{ul}$	$I_c$
1	0	0	0	3	1	0	1	537.03	5.66E+08	Labrosse et al. [75]
1	0	0	0	2	1	0	1	584.33	1.80E+09	Labrosse et al. [75]
2	0	1	1	3	1	1	0	3889.71	9.48E+06	6.86E-06
2	0	1	1	3	1	1	1	3889.75	9.48E+06	6.86E-06
2	0	1	1	3	1	1	2	3889.75	9.48E+06	6.86E-06
2	0	0	0	3	1	0	1	5017.08	1.34E+07	3.42E-05
2	1	1	2	3	2	1	1	5877.23	1.96E+06	3.82E-05
2	1	1	2	3	2	1	2	5877.24	1.76E+07	3.82E-05
2	1	1	2	3	2	1	3	5877.24	7.06E+07	3.82E-05
2	1	1	1	3	2	1	1	5877.25	2.94E+07	3.82E-05
2	1	1	1	3	2	1	2	5877.27	5.29E+07	3.82E-05
2	1	1	0	3	2	1	1	5877.59	3.92E+07	3.82E-05
2	1	0	1	3	2	0	2	6680.00	6.37E+07	4.11E-05
2	1	1	2	3	0	1	1	7067.12	1.54E+07	4.10E-05
2	1	1	1	3	0	1	1	7067.16	9.25E+06	4.10E-05
2	1	1	0	3	0	1	1	7067.66	3.08E+06	4.10E-05

suite du tableau sur la page suivante

$N_l$	$L_l$	$S_l$	$J_l$	$N_u$	$L_u$	$S_u$	$J_u$	$\lambda$ (Å)	$A_{ul}$	$I_c$
2	1	0	1	3	0	0	0	7283.36	1.83E+07	4.12E-05
2	0	1	1	2	1	1	0	10832.06	1.02E+07	Labrosse et al. [75]
2	0	1	1	2	1	1	1	10833.22	1.02E+07	Labrosse et al. [75]
2	0	1	1	2	1	1	2	10833.31	1.02E+07	Labrosse et al. [75]
2	0	0	0	2	1	0	1	20586.91	1.97E+06	2.34E-05
3	0	1	1	3	1	1	0	42954.18	1.08E+06	6.36E-06
3	0	1	1	3	1	1	1	42959.18	1.08E+06	6.36E-06
3	0	1	1	3	1	1	2	42959.58	1.08E+06	6.36E-06
3	0	0	0	3	1	0	1	74375.16	2.52E+05	2.20E-06
3	1	1	2	3	2	1	1	186209.13	3.56E+02	3.51E-07
3	1	1	1	3	2	1	1	186216.58	5.33E+03	3.51E-07
3	1	1	2	3	2	1	2	186224.46	3.20E+03	3.51E-07
3	1	1	2	3	2	1	3	186225.36	1.28E+04	3.51E-07
3	1	1	1	3	2	1	2	186231.91	9.60E+03	3.51E-07
3	1	1	0	3	2	1	1	186310.64	7.11E+03	3.51E-07
3	2	0	2	3	1	0	1	957867.25	1.53E+02	13.26E-09

Tab. B.2: Longueur d'onde, coefficient d'Einstein  $A_{ul}$  et rayonnement chromosphérique incident associé, pour chaque transition radiative autorisée, dans le cas du modèle Hen3sf. On se référera au texte pour les informations sur le rayonnement chromosphérique.





# Bibliographie

---

- [1] Aggarwal K.M., Kingston A.E. & McDowell M.R.C., 1984, *ApJ*, 278, 874
- [2] Andretta V. & Jones H.P., 1997, *ApJ*, 489, 375
- [3] Asplund M., Nordlund Å., Trampedach R., Allende Prieto C. & Stein R.F., 2000, *A&A*, 359, 729
- [4] Athay R.G., 1965, *ApJ*, 142, 755
- [5] Athay R.G., Querfeld C.W., Smartt R.N., Landi Degl’Innocenti E. & Bommier V., 1983, *Sol. Phys.*, 89, 3
- [6] Auer L.H. & Heasley J.N., 1976, *ApJ*, 205, 165
- [7] Auer L.H. & Mihalas D., 1969, *ApJ*, 158, 641
- [8] Auer L.H. & Paletou F., 1994, *A&A*, 285, 675
- [9] Auer L.H., Fabiani Bendicho P. & Trujillo Bueno J., 1994, *A&A*, 292, 599
- [10] Avrett E.H., 1968, in *Resonance Lines in Astrophysics*, ed. R.G. Athay, J. Mathis and A. Skumanich (Boulder : National Center for Atmospheric Research)
- [11] d’Azambuja L. & d’Azambuja M., 1948, *Annales de l’Observatoire de Paris*, 6, 7
- [12] Babcock H.W., 1961, *ApJ*, 133, 572
- [13] Babcock H.D. & Babcock H.W., 1955, *ApJ*, 121, 349
- [14] Baur T.G., Elmore D.E., Lee R.H., Querfeld C.W. & Rogers S.R., 1981, *Sol. Phys.*, 70, 395
- [15] Baur T.G., House L.L. & Hull H.K., 1980, *Sol. Phys.*, 65, 111
- [16] Beckers J.M., 1968, *Sol. Phys.*, 3, 367
- [17] Benjamin R.A., Skillman E.D. & Smits D.P., 1999, *ApJ*, 514, 307
- [18] Benson R.S. & Kulander J.L., 1972, *Sol. Phys.*, 27, 305
- [19] Berger T.E., Shine R.A., Slater G.L., Tarbell T.D., Title A.M. et al., 2008, *ApJ*, 676, L89
- [20] Bommier V., 1977, Thèse de Doctorat de 3ème cycle, Univ. de Paris VI
- [21] Bommier V., 1980, *A&A*, 87, 109
- [22] Bommier V. & Leroy J.-L., 1998, in *IAU Colloq. 167, New Perspectives on Solar Prominences*, ed. D. Webb, D. Rust & B. Schmieder (ASP Conf. Ser. 150; San Francisco : ASP), 434
- [23] Bommier V. & Sahal-Bréchet S., 1979, in *IAU Colloq. 44, Physics of Solar Prominences*, ed. E. Jensen, P. Maltby & F.Q. Orrall, 87

- [24] Bommier V., Leroy J.-L. & Sahal-Bréchet S., 1981, *A&A*, 100, 231
- [25] Bommier V., Landi Degl'Innocenti E., Leroy J.-L. & Sahal-Bréchet S., 1994, *Sol. Phys.*, 154, 231
- [26] Brandt A., 1977, *Math. Comp.*, 31, 333
- [27] Briggs W.L., Henson V.E. & McCormick S.F., 2000, in *A Multigrid Tutorial* (Philadelphia : Soc. for Industrial and Applied Math.)
- [28] Cannon C.J., 1973, *J. Quant. Spectros. Radiat. Transfer*, 13, 627
- [29] Cannon C.J., 1973, *ApJ*, 185, 621
- [30] Carlson B.G., 1963, in *Methods in Computational Physics*, Vol. 1, ed. B. Alder, S. Fernbach & M. Rotenberg (New York : Academic Press), 1
- [31] Chandrasekhar, S., 1950, in *Radiative Transfer*, Clarendon Press, Oxford, reprinted Dover Pub., 1960
- [32] Chevallier L. & Rutily B., 2005, *J. Quant. Spectros. Radiat. Transfer*, 91, 373
- [33] Chevallier L., Paletou F. & Rutily B., 2003, *A&A*, 411, 221
- [34] Cuny Y., 1967, *An Ap*, 30, 143
- [35] Delbouille L., Roland G. & Neven L., 1990, in *Atlas photométrique du spectre solaire de  $\lambda$  3000 Å à  $\lambda$  10000 Å* (Liège : Université de Liège, Institut d'Astrophysique, 1990)
- [36] del Toro Iniesta J.C., 1996, *Vistas in Astronomy*, 40, 241
- [37] Démoulin P., 1998, in *IAU Colloq. 167, New Perspectives on Solar Prominences*, ed. D. Webb, D. Rust & B. Schmieder (ASP Conf. Ser. 150; San Francisco : ASP), 78
- [38] Domiciano de Souza A., Kervella P., Jankov S., Abe L., Vakili F., di Folco E. & Paresce F., 2003, *A&A*, 407, L47
- [39] Donati J.-F., 2003, in *ASP Conf. Ser. 307, Third International Workshop on Solar Polarization*, ed. J. Trujillo Bueno & J. Sánchez Almeida (San Francisco : ASP), 41
- [40] Donati J.-F., Moutou C., Farès R., Bohlender D., Catala C., Deleuil M., Shkolnik E., Cameron A.C., Jardine M.M. & Walker G.A.H., 2008, *MNRAS*, in press
- [41] Engvold O., Hirayama T., Leroy J.-L., Priest E.R. & Tandberg-Hanssen E., 1990, *IAU Colloq. 117, Dynamics of Quiescent Prominences*, ed. V. Ruždjak & E. Tandberg-Hanssen, 294, *Lecture Notes in Phys.* 363 (Springer-Verlag)
- [42] Einstein A., 1917, *Phys. Z.*, 18, 121
- [43] Engvold O., 1976, *Sol. Phys.*, 49, 283
- [44] Fabiani Bendicho P., Trujillo Bueno J. & Auer L.H., 1997, *A&A*, 324, 161
- [45] Feautrier P., 1964, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 258, 3189
- [46] Fernley J.A., Seaton M.J. & Taylor K.T., 1987, *J. Phys. B*, 20, 6457
- [47] Fontenla J.M. & Rovira M., 1983, *Sol. Phys.*, 85, 141
- [48] Fontenla J.M. & Rovira M., 1985, *Sol. Phys.*, 96, 53
- [49] Fontenla J.M., Rovira M., Vial J.-C. & Gouttebroze P., 1996, *ApJ*, 466, 511
- [50] Frisch H. & Faurobert-Scholl M., 1990, in *Le Soleil, une étoile et son domaine*, ed. D. Benest & C. Froeschlé (Publications de l'OCA), 151

- [51] Gontikakis C., Vial J.C. & Gouttebroze P., 1997, *A&A*, 325, 803
- [52] González M., Audit E. & Huynh P., 2007, *A&A*, 464, 429
- [53] Gouttebroze P., Heinzel P. & Vial J.C., 1993, *A&AS*, 99, 513
- [54] Gunár S., Heinzel P., Schmieder B., Schwartz P. & Anzer U., 2007, *A&A*, 472, 929
- [55] Hackbusch W., 1985, in *Multi-Grid Methods and Applications* (Berlin : Springer)
- [56] Heasley J.N. & Milkey R.W., 1976, *ApJ*, 210, 827
- [57] Heasley J.N. & Milkey R.W., 1983, *ApJ*, 268, 398
- [58] Heasley J.N., Mihalas D. & Poland A.-I., 1974, *ApJ*, 192, 181
- [59] Heinzel P., 1989, *Hvar Obs. Bull.*, 13(1), 317
- [60] Heinzel P., 1995, *A&A*, 299, 563
- [61] Heinzel P. & Anzer U., 2001, *A&A*, 375, 1082
- [62] Heinzel P. & Rompolt B., 1987, *Sol. Phys.*, 110, 171
- [63] Heinzel P., Gouttebroze P. & Vial J.-C., 1987, *A&A*, 183, 351
- [64] Heinzel P., Schmieder B., Vial J.-C. & Kotrč P., 2001, *A&A*, 370, 281
- [65] Hirayama T., 1971, *Sol. Phys.*, 17, 50
- [66] House L.L. & Smartt R.N., 1982, *Sol. Phys.*, 80, 53
- [67] Hubeny I., 2003, in *ASP Conf. Ser. 288, Stellar Atmosphere Modeling*, ed. I. Hubeny, D. Mihalas & K. Werner (San Francisco : ASP), 17
- [68] Ioshpa B.A., 1962, *Geomagn. Aeron.*, 2, 149
- [69] Johnson L.C., 1972, *ApJ*, 174, 227
- [70] Katz D., Munari U., Cropper M., Zwitter T., Thévenin F. et al., 2004, *MNRAS*, 354, 1223
- [71] Kuin N.P.M. & Poland A.I., 1991, *ApJ*, 370, 763
- [72] Kunasz P.B. & Auer L.H., 1988, *J. Quant. Spectros. Radiat. Transfer*, 39, 67
- [73] Labrosse N. & Gouttebroze P., 2001, *A&A*, 380, 323
- [74] Labrosse N. & Gouttebroze P., 2004, *ApJ*, 617, 614
- [75] Labrosse N., Gouttebroze P. & Vial J.-C., 2007, *A&A*, 463, 1171
- [76] Landi Degl'Innocenti E., 1982, *Sol. Phys.*, 79, 291
- [77] Landi Degl'Innocenti E., 1990, in *IAU Colloq. 117, Dynamics of Quiescent Prominences*, ed. V. Ruždjak & E. tandberg-Hanssen (Springer)
- [78] Léger L. & Paletou F., 2007, *astro-ph 0712.1701v1*, to appear in the *Procs. of Solar Polarization Workshop 5*, eds. Berdyugina, Nagendra and Ramelli
- [79] Léger L., Chevallier L. & Paletou F., 2007, *A&A*, 470, 1
- [80] Leroy J.-L., 1972, *Sol. Phys.*, 25, 413
- [81] Leroy J.-L., 1977, *A&A*, 60, 79
- [82] Leroy J.-L., 1978, *A&A*, 64, 247
- [83] Leroy J.-L., 1979, in *IAU Colloq. 44, Physics of Solar Prominences*, ed. E. Jensen, P. Maltby & F.Q. Orrall, 56

- [84] Leroy J.-L., 1989, in *Dynamics and Structure of Quiescent Solar Prominences*, ed. E.R. Priest (Kluwer)
- [85] Leroy J.-L., Bommier V. & Sahal-Bréchet S., 1983, *Sol. Phys.*, 83, 135
- [86] Leroy J.-L., Bommier V. & Sahal-Bréchet S., 1984, *A&A*, 131, 33
- [87] Leroy J.-L., Ratier G. & Bommier V., 1977, *A&A*, 54, 811
- [88] Lin H., Penn M.J. & Kuhn J.R., 1998, *ApJ*, 493, 978
- [89] Lin Y., Engvold O., Rouppe van der Voort L.H.M., Wiik J.E. & Berger T.E., 2005, *Sol. Phys.*, 226, 239
- [90] López Ariste A. & Casini R., 2002, *ApJ*, 575, 529
- [91] López Ariste A. & Casini R., 2005, *A&A*, 436, 325
- [92] Low B.C. & Petrie G.J.D., 2005, *ApJ*, 626, 551
- [93] Martin S.F., Bilimoria R. & Tracadas P.W., 1994, in *Solar Surface Magnetism* (Dordrecht : Kluwer), 303
- [94] Mauas P.J.D., Andretta V., Falchi A., Falciani R., Teriaca L. & Cauzzi G., 2005, *ApJ*, 619, 604
- [95] Mein P. & Mein N., 1991, *Sol. Phys.*, 136, 317
- [96] Mein P., Mein N., Schmieder B. & Noëns J.-C., 1989, *Hvar Obs. Bull.*, 13(1), 113
- [97] Meunier N., Rondi S., Tkaczuk R., Rieutord M. & Beigbeder F., 2005, in *ASP Conf. Ser. 346, Large-scale Structures and their Role in Solar Activity*, ed. K. Sankarasubramanian, M. Penn & A. Pevtsov (San Francisco : ASP), 53
- [98] Mihalas D., 1978, in *Stellar Atmospheres* (San Francisco : Freeman)
- [99] Mihalas D., Auer L.H. & Mihalas B.R., 1978, *ApJ*, 220, 1001
- [100] Morozhenko N.N., 1978, *Sol. Phys.*, 58, 47
- [101] Olson G.L., Auer L.H. & Buchler J.R., 1986, *J. Quant. Spectros. Radiat. Transfer*, 35, 431
- [102] Olson G.L. & Kunasz P.B., 1987, *J. Quant. Spectros. Radiat. Transfer*, 38, 325
- [103] Ossendrijver M., 2002, in *Solar variability : from core to outer frontiers*, ed. A. Wilson, ESA SP-506 (Noordwijk : ESA Publications Division), 797
- [104] Paletou F., 1995, *A&A*, 302, 587
- [105] Paletou F., 1996, *A&A*, 311, 708
- [106] Paletou F., 1997, *A&A*, 317, 244
- [107] Paletou F., 2001, *C. R. Acad. Sci. Paris, t. 2, Série IV*, 885
- [108] Paletou F. & Aulanier G., 2003, in *ASP Conf. Ser. 307, Third International Workshop on Solar Polarization*, ed. J. Trujillo Bueno & J. Sánchez Almeida (San Francisco : ASP), 458
- [109] Paletou F. & Léger L., 2007, *J. Quant. Spectros. Radiat. Transfer*, 103, 57
- [110] Paletou F. & Molodij G., 2001, *ASPC*, 236, 9
- [111] Paletou F., Vial J.-C. & Auer L.H., 1993, *A&A*, 274, 571
- [112] Paletou F., López Ariste A., Bommier V. & Semel M., 2001, *A&A*, 375, 39

- [113] Pilbratt G.L., 2005, In Proceedings of the dusty and molecular universe : a prelude to Herschel and ALMA, ed. A. Wilson (ESA SP-577, Noordwijk, Netherlands : ESA Publications Division), 3
- [114] Priest E.R., van Ballegooijen A.A. & Mackay D.H., 1996, *ApJ*, 460, 530
- [115] Querfeld C.W., Smartt R.N., Bommier V., Landi Degl’Innocenti E. & House L.L., 1985, *Sol. Phys.*, 96, 277
- [116] Ralchenko Yu., Kramida A.E., Reader J. and NIST ASD Team, 2008, NIST Atomic Spectra Database (version 3.1.5), available online : <http://physics.nist.gov/asd3>, National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD (USA)
- [117] Ratier G., 1975, *Nouv. Revue Optique*, 6, 149
- [118] Rieutord M., Meunier N., Roudier T., Rondi S., Beigbeder F. & Parès L., 2008, *A&A*, 479, 17
- [119] Rust D.M., 1967, *ApJ*, 150, 313
- [120] Rutten R.J., 2003, in ASP Conf. Ser. 288, Stellar Atmosphere Modeling, ed. I. Hubeny, D. Mihalas & K. Werner (San Francisco : ASP), see also Radiative transfer in Stellar Atmospheres, Sterrekundig Instituut Utrecht<sup>a</sup>
- [121] Rybicki G.B. & Hummer D.G., 1991, *A&A*, 245, 171
- [122] Rybicki G.B. & Hummer D.G., 1992, *A&A*, 262, 209
- [123] Rybicki G.B. & Lightman A.R., 1979, in Radiative Processes in Astrophysics (Wiley-Interscience Publication)
- [124] Sahal-Bréchet S., 1981, *Space Sci. Rev.*, 30, 99
- [125] Sahal-Bréchet S., Bommier V. & Leroy J.-L., 1977, *A&A*, 59, 223
- [126] Sanderson T.R., Appourchaux T., Hoeksema J.T. & Harvey K.L., 2003, *JGRA*, 108, 1035
- [127] Scharmer G.B. & Carlsson M., 1985, *J. Comput. Phys.*, 59, 56
- [128] Stellmacher G. & Wiehr E., 1997, *A&A*, 319, 669
- [129] Subramanian P. & Dere K.P., 2001, *ApJ*, 561, 372
- [130] Tandberg-Hanssen E., 1995, in The Nature of Solar Prominences, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Holland
- [131] Tandberg-Hanssen E. & Emslie A.G., 1988, in The Physics of Solar Flares, Cambridge Astrophysics Ser., Cambridge University Press, Cambridge, UK
- [132] Tobiska W.K., 1991, *J. Atmos. Terr. Phys.*, 53, 1005
- [133] Trujillo Bueno J. & Asensio Ramos A., 2007, *ApJ*, 655, 642
- [134] Trujillo Bueno J. & Fabiani Bendicho P., 1995, *ApJ*, 455, 646
- [135] Trujillo Bueno J., Landi Degl’Innocenti E., Collados M., Merenda L. & Manso Sainz R., 2002, *Nature*, 415, 403
- [136] Vial J.C., 1982, *ApJ*, 254, 780
- [137] Vial J.-C., Rovira M., Fontenla J.M. & Gouttebroze P., 1989, *Hvar Obs. Bull.*, 13(1), 347

---

<sup>a</sup>[http://www.fys.ruu.nl/~rutten/Astronomy\\_course.html](http://www.fys.ruu.nl/~rutten/Astronomy_course.html)

- [138] Walhstrøm C. & Carlsson M., 1994, *ApJ*, 433, 417
- [139] Webb D.F., Cliver E.W., Crooker N.U., St. Cyr O.C. & Thomson B.J., 2000, *JGR*, 105, A4, 7491
- [140] Wooten A., 2008, *Ap&SS*, 313, 9
- [141] Young D.M., 1971, in *Iterative Solution of Large Linear Systems* (New York : Academic Press)
- [142] Zharkova V.V., 1984, *Astrometry and Astrophysics (USSR)*, 51, 45
- [143] Zharkova V.V., 1989, *Hvar Obs. Bull.*, 13(1), 331
- [144] Zirin H., 1975, *ApJ*, 199, L63
- [145] Zirin H. & Severny A.B., 1961, *Observatory*, 81, 155